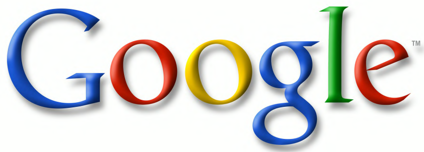
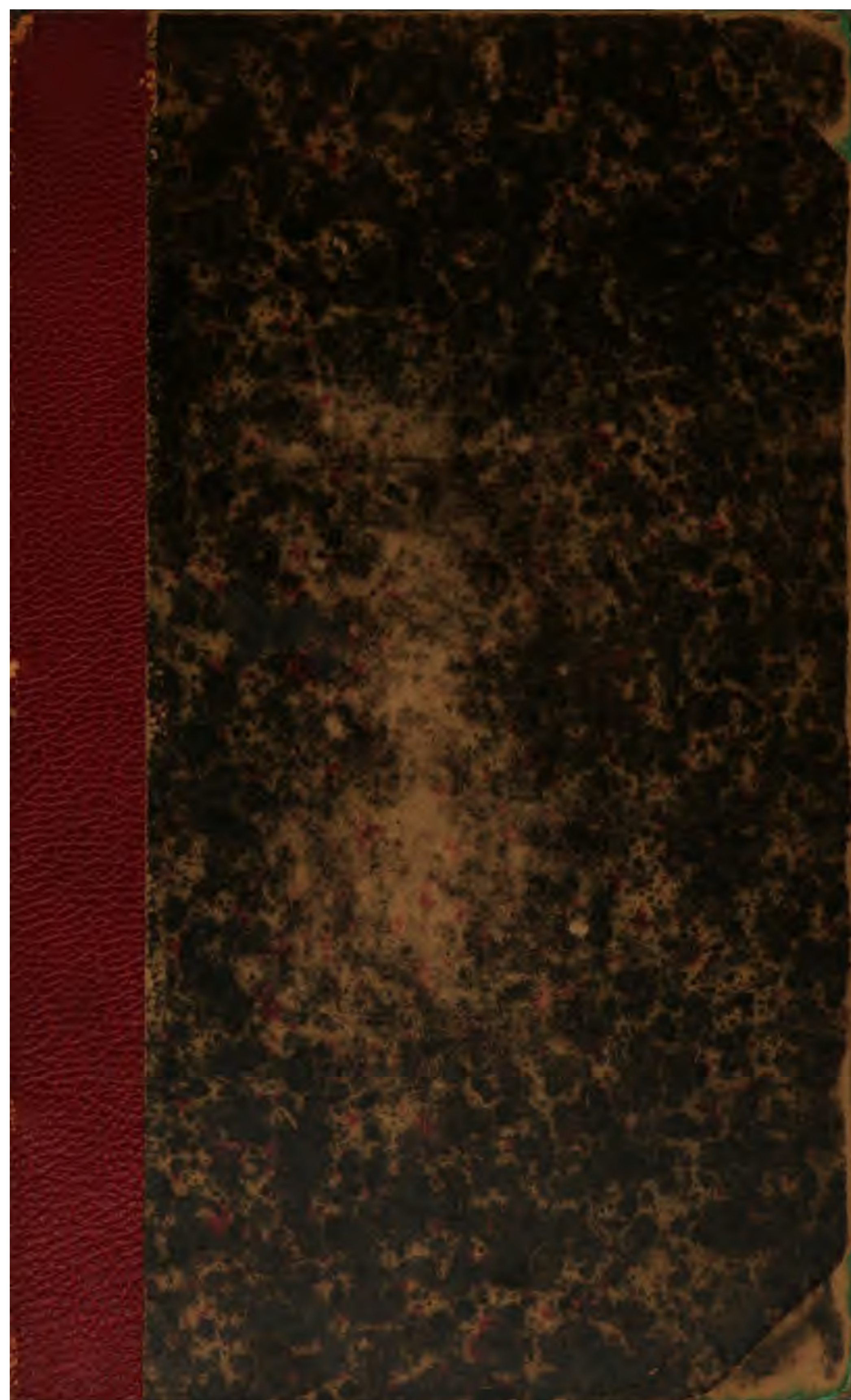




LEÇONS SUR LES MÉTHODES
DE LA
GÉOMÉTRIE MODERNE

LEÇONS SUR LES MÉTHODES

DE LA

GÉOMÉTRIE MODERNE

COURS DE SCIENCES
PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE B. NIEWENGLOWSKI
DOCTEUR ÈS-SCIENCES
INSPECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS

LEÇONS SUR LES MÉTHODES DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE

PAR

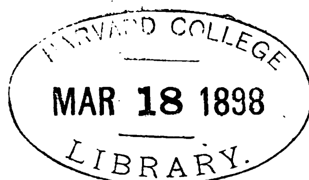
J. RICHARD

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE DE TOURS



PARIS
SOCIÉTÉ D'ÉDITIONS SCIENTIFIQUES
4, RUE ANTOINE-DUBOIS, 4
PLACE DE L'ÉCOLE DE MÉDECINE

1898


HARVARD COLLEGE
MAR 18 1898
LIBRARY.

AVERTISSEMENT

Ces leçons de géométrie moderne contiennent des matières généralement enseignées comme de simples dépendances de la géométrie analytique.

Elles contiennent, en outre, l'application de ces théories aux lignes et surfaces du troisième ordre. On verra combien une telle méthode l'emporte en simplicité sur la géométrie analytique.

Voulant que ces leçons puissent être comprises même des meilleurs élèves de mathématiques élémentaires, je n'ai nulle part supposé connues ni la théorie des déterminants, ni celle des dérivés.

Comme il était nécessaire d'employer le calcul des imaginaires, j'en ai fait l'objet d'une leçon.

Pensant qu'un aperçu sur la géométrie non euclidienne était de nature à intéresser le lecteur, j'ai, à la fin, ajouté une leçon sur ce sujet en la faisant précéder de deux autres nécessaires à son exposition.

Les matières de ces leçons sont généralement étudiées dans les cours de mathématiques spéciales, autant que le permet un programme chargé. Leur place naturelle serait, semble-t-il, dans le cours dit :

Elémentaires supérieures, qui existe seulement dans certains lycées.

J'ai peu cité de noms d'auteurs, craignant souvent de me tromper dans l'attribution d'une théorie à tel ou tel géomètre.

Les figures sont peu nombreuses, mais le lecteur peut aisément les construire lui-même, la construction est toujours indiquée dans le texte d'une façon précise.

LEÇONS SUR LES MÉTHODES

DE LA

GÉOMÉTRIE MODERNE

PREMIÈRE LEÇON

Usage en géométrie des quantités affectées de signes.

§ **1.** — Sur une ligne indéfinie on peut distinguer deux sens différents ; si, par exemple, la ligne est horizontale, on peut distinguer le sens de droite à gauche, et celui de gauche à droite. Choisissons arbitrairement l'un de ces deux sens et donnons-lui le nom de *sens positif*, on pourra nommer l'autre *sens négatif.*

Cela posé, considérons deux points A et B sur cette droite ; soit l leur distance. Nous désignerons par la notation AB un nombre précédé d'un signe (quantité algébrique) égal à $+l$ ou à $-l$, selon que, pour aller de A vers B, on va dans le sens positif ou en sens inverse.

Si pour aller de A vers B on va dans le sens positif, pour aller de B vers A on va en sens inverse. Si donc $AB = +l$, BA sera égal à $-l$, de même, si AB était égal à $-l$, BA serait égal à $+l$. On a donc dans tous les cas :

(1) $$AB = -BA$$

§ **2.** — Proposition I. — *On a, quelle que soit la position des points* A B C *en ligne droite :*

(2) $$AB + BC + CA = 0$$

En effet, supposons d'abord que les trois points A B C soient tels que le sens de A vers B soit le même que celui de B vers

C et que ce soit le sens positif. Alors la longueur AC étant formée des longueurs AB et BC placées bout à bout, en nommant $l\,l'\,l''$ ces trois longueurs, on aura :

$$l' + l'' = l$$

Mais ici $AB = + l'$, $BC = + l''$ $AC = + l$ d'après notre notation, donc :

$$AB + BC = AC$$

mais $AC = - CA$, donc $AB + BC = - CA$ ou $AB + BC + CA = 0$

Supposons maintenant les points A B C placés d'une façon quelconque sur la droite. On peut, par des permutations ou échanges successifs de deux lettres, passer de l'ordre A B C à un ordre quelconque. On peut donc amener les lettres A B C par des échanges successifs dans un ordre, tel que le sens de A vers B et celui de B vers C soient le sens positif. Pour démontrer la proposition d'une façon générale, il suffira donc de faire voir que l'échange de deux lettres la laisse subsister.

Or, si dans l'égalité on échange B et C, on aura:

$$AC + CB + BA = 0$$

ou bien $AB + BC + CA = 0$

mais $AC = - CA$ $CB = - BC$ $BA = - AB$, on a donc en changeant tous les signes:

$$CA + BC + AB = 0$$

L'égalité reste donc vraie quand B et C ont été intervertis. Elle est générale.

§ 3. — PROPOSITION II. — *Si* A B C D ... G H K L *sont* n *point en ligne droite, on a, quel que soit l'ordre de ces points* :

(3) $AB + BC + CD + \ldots + GH + HK + KL + LA = 0.$

D'après la *proposition* I ce théorème est vrai pour 3 points ; je vais faire voir que s'il est vrai pour un certain nombre de points, il est vrai pour un point de plus.

En effet, supposons le vrai pour les points A B C D ... H K on aura :

$$AB + BC + CD + \dots + GH + HK + KA = 0$$

mais il est vrai aussi pour les points A K L on a donc

$$AK + KL + LA = 0$$

Ajoutons membre à membre ces deux égalités en remarquant que KA et AK se détruisent. Il reste précisément l'égalité ([1]) à démontrer.

Si donc le théorème est vrai pour 3 points, il est vrai pour 4, puis pour 5; et comme par additions successives de l'unité, on peut atteindre un nombre n quelconque, il est vrai pour n points quel que soit n.

§ 4. — *Abcisse d'un point.* — Sur la droite indéfinie qui nous occupe, prenons un point O, que nous nommerons l'origine ; prenons un point P quelconque. OP s'appellera l'abcisse du point P. Ce sera un nombre positif ou négatif selon que pour aller de O vers P on va dans le sens positif ou en sens inverse.

Le point P est complètement déterminé quand son abcisse est connue, car le signe de cette abcisse indique de quel côté il est par rapport à O et sa valeur absolue donne la distance de P au point O.

§ 5. — Proposition III. — *Un segment* PQ *est égal en grandeur et signe à la différence entre l'abcisse du 2e point* Q *et l'abcisse du 1er point* P.

En effet, d'après la proposition ([1]) on a :

$$OP + PQ + QO = 0$$

mais $QO = -OQ$ donc $OP + PQ - OQ = 0$

([1]) c'est-à-dire $PQ = OQ - OP$ *(ce qu'il fallait démontrer).*

§ 6. — *Point qui divise un segment dans un rapport donné.* — Soient P et Q deux points, x_0 l'abcisse OP du point P, x_1 l'abcisse OQ du point Q. Soit x l'abcisse d'un point M, et m le rapport $\frac{PM}{MQ}$.

On a (*prop. III*) $PM = x - x_0$ $MQ = x_1 - x$ ainsi

$$m = \frac{x - x_0}{x_1 - x} \text{ ou } mx_1 - mx = x - x_0$$

$$\text{ou } x(1 + m) = x_0 + mx_1$$

(5) $$x = \frac{x_0 + mx_1}{1 + m}$$

La formule (5) nous sera utile plus tard. Pour le moment nous nous bornerons à remarquer que m étant connu, le point M est entièrement déterminé, il est entre P et Q si m est positif, car alors PM et MQ sont de même signe; dans le cas contraire, il est extérieur au segment PQ.
si $m = 1$ on a $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$, le point M est alors le milieu de PQ.
si $m = -1$ x est infini puisque le dénominateur est seul, ainsi un point M à l'infini sur une droite est un point tel que $\frac{PM}{MQ} = -1$ ou en remplaçant PM par — MP : $\frac{PM}{MQ} = 1$.

Cette remarque servira souvent dans la suite.

§ 7. — Proposition IV. — *Étant donnés 4 points* A B C D *en ligne droite, on a toujours la relation*

(6) $$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD.$$

En effet a b c d désignant les abcisses respectives des points A B C D on a : $AB = b - a$ $CD = d - c$ $BC = c - b$ $AD = d - a$ $AC = c - a$ $BD = d - b$
tout revient donc à démontrer que

$$(b - a)(d - c) + (c - b)(d - a) = (c - a)(d - b)$$

C'est là une identité facile à vérifier.

Chasles donne dans son *Traité de géométrie*, un grand nombre d'égalités du même genre; mais comme elles se ramènent toujours à des identités algébriques, elles n'offrent pas un grand intérêt au point de vue géométrique.

§ 8. — Nous allons appliquer les principes qui précèdent à la transformation de quelques relations concernant des points en ligne droite.

On dit que deux points C et D sont conjugués harmoniques par rapport à deux autres A et B si l'on a :

(7) $$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \text{ ou encore } \frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$$

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ. — *Si* C *et* D *sont conjugués par rapport à* A *et* B, A *et* B *sont conjugués par rapport à* C *et* D.

En effet la proportion $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$ peut s'écrire en changeant la place des extrêmes et des moyens : $\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}$, ou par le changement de signe des 4 termes : $\frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD}$.

Or, cette dernière égalité diffère de la première par l'interversion des lettres A et C et celle des lettres B et D, elle exprime donc que A et B sont conjugués par rapport à C et D.

§ 9. — DEUXIÈME PROPRIÉTÉ. — *Si* O *est le milieu de* AB, *la relation* $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$ *équivaut à* :

(8) $$OA^2 = OC \times OD.$$

En effet, on a $CA = OA - OC$. $CB = OB - OC = -OA - OC$ parce que $OB = -OA$ $DA = OA - OD$ $DB = OB - OD$ $OA - OD$, toutes ces égalités résultent de la proposition III.

La relation proposée est donc : $\frac{OA - OC}{-OA - OC} = -\frac{OA - OD}{-OA - OD}$ ou
$(OA - OC)(OA + OD) + (OA - OD)(OA + OC) = 0$
effectuant et divisant par 2. $OA^2 = OC \times OD$.

§ 10. — TROISIÈME PROPRIÉTÉ. — *La relation* $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$ *équivaut à* :

(9) $$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

en effet on a $CB = AB - AC$ $DB = AB - AD$ (*Proposition III*).
donc la relation (7) peut s'écrire $\frac{CA}{AB - AC} = -\frac{DA}{AB - AD}$ ou

$\frac{AB - AC}{AC} + \frac{AB - AD}{AD} = 0$ ou encore $\frac{AB}{AC} = 1 + \frac{AB}{AD} - 1 = 0$

ou $2 = \frac{AB}{AC} + \frac{AB}{AD}$ ou $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

Quatrième Propriété. — *Quand le point* D *va à l'infini, le point* C *vient au milieu de* AB.

En effet la relation (8) peut s'écrire $OC = \frac{OA^2}{OD}$. On voit que si OD grandit indéfiniment, OC tend vers zéro. C vient donc coïncider avec le point O, milieu de AB.

§ **11**. — *On dit que quatre points* A B C D *ont un rapport anharmonique égal à* m *lorsque*

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = m$$

On voit que si $m = -1$ on a la relation (7), qui exprime que C et D sont conjugués par rapport à A et B, ou que A et B sont conjugués par rapport à C et D.

Pour désigner le rapport anharmonique $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ nous emploierons la notation (ABCD). Voici maintenant des propriétés de cette expression.

§ **12**. — Première Propriété. — *Le rapport anharmonique* ABCD *ne change pas quand on intervertit deux des points, pourvu qu'on intervertisse en même temps les deux autres.*

Ainsi (ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA).

En effet on a :

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = (CDAB)$$

les autres égalités se démontrent de la même façon.

§ **13**. — Deuxième Propriété. — *En intervertissant l'ordre des points, on peut former 6 rapports anharmoniques distincts: ils s'expriment tous au moyen de l'un d'entre eux.*

En effet, on sait que quatre lettres A B C D peuvent être rangées de

24 façons différentes, cela fait 24 rapports anharmoniques, qui, d'après la propriété précédente, sont égaux quatre à quatre, il n'y en a donc que six de distincts, ce sont :

(ABCD) (BACD) (CBAD) (DBCA) (BCAD) (BDCA)

Désignons le premier par m on a :

$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = m$ le second est $\frac{CB}{CA} : \frac{DB}{DA}$, c'est-à-dire $\frac{1}{m}$; le troisième est : $\frac{AC}{AB} : \frac{DC}{DB}$; pour l'évaluer employons l'égalité (6) *(Propr. IV)*

$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$$

divisons-en les deux membres par $AC \times BD$ on aura :

$$\frac{AB}{AC} \times \frac{CD}{BC} + \frac{BC}{AC} \times \frac{AD}{BD} = 1$$

$$\text{ou : } \frac{AB}{AC} : \frac{DC}{DB} + \frac{CB}{AC} : \frac{DB}{DA} = 1$$

en désignant par μ le rapport que nous cherchons, cette égalité donne

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{m} = 1 \quad m + \mu = m\mu \quad \text{ou } \mu = \frac{m}{m-1}.$$

Passons au 4me rapport $\frac{CD}{CB} : \frac{AD}{AB}$. Pour l'évaluer prenons l'égalité précédente et divisons tout par $BC \times AD$ il vient :

$$\frac{CD}{BC} \times \frac{AB}{AD} + 1 = \frac{AC}{AD} \times \frac{BD}{BC}$$

ou bien (changeant tous le signes) :

$$\frac{CD}{CB} : \frac{AD}{AB} - 1 = -\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -m$$

le rapport cherché est donc égal à $1 - m$ appelons le ν

Le 5me rapport est évidemment $\frac{1}{\mu}$ ou $\frac{m-1}{m}$ (de la même façon que l second est $\frac{1}{m}$) le 6me est $\frac{1}{\nu}$ ou $\frac{1}{1-m}$.

Ainsi les six rapports sont :

$$m \quad \frac{1}{m} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{m}} \quad 1-m \quad 1-\frac{1}{m} \text{ et } \frac{1}{1-m}$$

on peut les accoupler deux à deux de façon que leur produit soit égal à 1 ou de façon que leur somme soit égale à 1, ou de façon que la somme de leurs inverses soit égale à 1.

§ **14.** — Troisième Propriété. — Soient $a\ b\ c\ d$ les abcisses des quatre points $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ quatre variables qui se déduisent de $a\ b\ c\ d$ respectivement, par une transformation de la forme $x = \frac{m\xi + n}{p\xi + q}$, c'est-à-dire que :

$$a = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q} \qquad b = \frac{m\beta + n}{p\gamma + q} \qquad c = \frac{m\gamma + n}{p\gamma + q} \qquad d = \frac{m\delta + n}{p\delta + q},$$

en supposant que $mq - np$ soit différent de zéro, le rapport anharmonique $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ qui est égal à $\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$ est aussi égal à $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$

La démonstration est facile à faire : on a d'abord :

$$a - c = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q} - \frac{m\gamma + n}{p\gamma + q} = \frac{(mq - np)(\alpha - \gamma)}{(p\alpha + q)(p\gamma + q)}$$

on a de même : $b - c = \frac{(mq - np)(\beta - \gamma)}{(p\beta + q)(p\gamma + q)}$

par suite : $\frac{a-c}{b-c} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} \times \frac{p\beta + q}{p\alpha + q}$

de même : $\frac{a-d}{b-d} = \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta} \times \frac{p\beta + q}{p\alpha + q}$

et par suite, en divisant membre à membre

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$$

ce qui démontre la proposition.

Voici une des nombreuses applications de cette propriété. Soit sur la droite deux points P et Q d'abcisses p et q, et soit α le rapport $\frac{PA}{AQ}$ β le rapport $\frac{BP}{BQ}$, γ le rapport $\frac{PC}{CQ}$, δ le rapport $\frac{PD}{DQ}$. On a :

$$a = \frac{p + \alpha q}{1 + \alpha}, \quad b = \frac{p + \beta q}{1 + \beta} \quad \text{etc. (Egalité } 5)$$

Ce théorème est donc applicable ici et donne pour le rapport anharmonique des quatre points l'expression $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta} : \frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}$

De même si nous appelons α non pas le rapport $\frac{PA}{AQ}$ mais le rapport $\frac{PA}{AQ} : \frac{RA}{RQ}$ (R étant un autre point fixe) et $\beta = \frac{PB}{BQ} : \frac{RP}{RQ}$ etc. nous aurions encore la même expression pour le rapport anharmonique.

§ **15**.— En terminant cette leçon, j'indiquerai une locution qui, dans la suite, nous sera très commode. Au lieu de dire que plusieurs droites sont parallèles, nous dirons qu'elles concourent en un même point à l'infini. Cela est permis parce que deux droites parallèles à une 3me étant parallèles entre elles, on peut dire que deux droites ayant un point commun à l'infini avec une 3me ont ce point commun entre elles. On regarde ainsi un point à l'infini comme étant une direction de droite. Joindre un point A à un point à l'infini, c'est mener par A une parallèle à une direction donnée. Deux plans parallèles devront alors être regardés comme se coupant suivant une droite à l'infini. Donner une droite à l'infini, c'est donner une direction de plan.

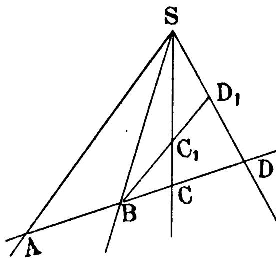
A l'aide de ces locutions, on peut dire que deux droites dans un même plan se coupent toujours, qu'une droite et un plan se coupent toujours. Cela simplifie les démonstrations, car ayant examiné le cas où plusieurs droites concourent, nous n'avons pas à examiner celui où elles seraient parallèles.

DEUXIÈME LEÇON

Théorèmes relatifs à la projectivité du rapport anharmonique

§ **16.** — *Ce qu'on nomme* **projectivité du rapport anharmonique** *consiste dans la proposition suivante, l'une des plus importantes de la géométrie moderne :*

Si l'on coupe par une droite D un faisceau de quatre droites passant par un même point S, le rapport anharmonique des quatre points A B C D où la droite D rencontre ces quatre droites, reste constant quand on déplace la droite D.



Voici une première démonstration très simple de cette proposition.

Menons par le point B une parallèle à AS qui coupe SC en C_1, SD en D_1. De la similitude des triangles SCA, BC_1C, on déduit : $\frac{CA}{CB} = \frac{SA}{C_1B}$. De la même similitude des triangles SDA BD_1D on déduit de même : $\frac{DA}{DB} = \frac{SA}{D_1B}$ et par conséquent, en divisant membre à membre les deux égalités précédentes : $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{D_1B}{C_1B}$. Il est facile de s'assurer que cette égalité a bien lieu en tenant compte des signes ; or le second membre est le même quelle que soit la sécante ABCD.

§ **17**. — *La démonstration suivante de la même proposition a l'avantage de fournir l'expression du rapport anharmonique en fonction des angles du faisceau* S A B C D.

Désignant par h la distance du point S à la droite ABCD, on a :

$Aire\ SCA = CA \times \frac{h}{2}$, et d'autre part : $Aire\ SCA = \frac{SA \times SC\ Sin\ CSA}{2}$

en égalant ces 2 valeurs de l'aire SCA on trouve $CA = \frac{SA \times SC}{h}\ Sin\ CSA$: on aura de même : $CB = \frac{SB \times SC}{h}\ Sin\ CSB$ d'où, en divisant membre à membre :

$\frac{CA}{CB} = \frac{SA}{SB} \times \frac{sin\ CSA}{sin\ CSB}$, et de même $\frac{DA}{DB} = \frac{SA}{SB} \times \frac{Sin\ DSA}{Sin\ DSB}$, d'où par division :

$$\frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB} = \frac{Sin\ CSA}{Sin\ CSB} \cdot \frac{Sin\ DSA}{Sin\ DSB}$$

Quant aux signes des deux membres, on s'assure qu'ils sont les mêmes en remarquant que si CA et CB sont de même sens, c'est que le sens de rotation amenant SA sur SC est le même que celui par lequel on amène SB sur SC. C'est alors que *Sin* CSA et *Sin* CSB ont le même signe. On remarque aussi que ce signe ne change pas quand on remplace un angle par son supplément.

Dès lors $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{DA}{DB}$ ont le même signe que $\frac{Sin\ CSA}{Sin\ CSB}$ et $\frac{Sin\ DSA}{Sin\ DSB}$ la proposition est alors démontrée.

La proposition qui vient d'être démontrée est liée intimement à une autre propriété du rapport anharmonique, dont nous avons parlé au chapitre précédent.

Nons avons vu que si l'on pose $f(x) \frac{m\,x + n}{p\,x + q}$, on a :

$$\frac{f(\alpha) - f(\gamma)}{f(\beta) - f(\delta)} \cdot \frac{f(\alpha) - f(\delta)}{f(\delta) - f(\delta)} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}$$

§ **18**. — Proposons-nous de résoudre la question suivante : sur deux droites D et D' on fait correspondre les deux points M et M' tellement choisis que la droite MM' passe par un point fixe S, à chaque point M sur la droite C correspond sur l'autre droite D' le point M'. On propose de trouver la relation entre les abcisses des points M et M',

comptées sur chacune des droites à partir de deux points O et CO' arbitrairement choisis.

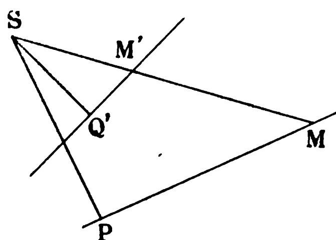
Soient A B C trois points de D, A' B' C' les points correspondants sur D', de sorte que AA' BB' CC' passent par S. On aura d'après la proposition fondamentale.

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{CA}{CB} = \frac{M'A'}{M'B'} \cdot \frac{C'A'}{C'B'}$$

Si $a\ b\ c\ x$ sont les abcisses des points A B C M, $a'\ b'\ c'\ x'$ celle des points correspondants A' B' C' M', on aura :

$$\frac{a-x}{b-x} \cdot \frac{a-c}{b-c} = \frac{a'-x'}{b'-x'} \cdot \frac{a'-c'}{b'-c'}$$

en tirant x', de cette équation, on a une expression de la forme $x' = \frac{mx+n}{px+q}$. Si inversement on savait qu'il existe entre x et x' une relation de cette forme, la propriété fondamentale se démontrerait à l'aide de la proposition du § 14, rappelée ci-dessus. Or il est facile de prouver l'existence de cette relation, ce qui constituera une troisième démonstration du principe fondamental. Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur D, Q' celui de la perpendiculaire menée de S sur D'; en choisissant un sens pour compter les angles on a en grandeur et signe :



$$\frac{PM}{SP} = tg\,PSM \quad \frac{Q'M'}{SQ} = tg\,Q'SM'$$

et d'autre part on aura en posant PSQ' $= \alpha$: Q'SM' $-$ PSM $= \alpha$ d'où :

$$tg\,\alpha = \frac{tg\,Q'SM' - tg\,PSM}{1 + tg\,PSM\,tg\,Q'SM'} = \frac{\frac{Q'M'}{SQ'} - \frac{PM}{SP}}{1 + \frac{PM.QM'}{SP.SQ'}}$$

appelons $p\ q$ les quantités SP, SQ. $a\ b$ les abcisses de P et Q', x, x' celles de M et M' on a : $tg\,\alpha = \frac{p\,(x'-b) - q\,(x-a)}{p\,q + (x-a)\,(x'-b)}$

équation qui, résolue par rapport à x' a bien la forme annoncée.

§ **19.** — Rapport anharmonique de quatre plans. — Considérons quatre plans P_1 P_2 P_3 P_4 se coupant suivant une même droite L et soient deux droites Δ et Δ', la première coupant les quatre plans en A B C D, la seconde les coupant en A′ B′ C′ D′. Je dis que les rapports anharmoniques (A B C D) (A′ B′ C′ D′) sont égaux. Prenons en effet sur la droite L deux points S et S′. Les deux plans $S\Delta$, $S'\Delta'$ se coupent suivant une droite ω, rencontrant les quatre plans en $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$. Et puisque la droite ω est à la fois dans le plan $S\Delta$ et dans le plan $S'\Delta'$, les points $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ sont à la fois sur les rayons du faisceau S (ABCD) et sur ceux du faisceau S (A′B′C′D′) on a donc dans le faisceau S (ABCD).

$$(ABCD) = (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) \qquad (\S\ 16)$$

et dans le faisceau S (A′B′C′D′)

$$(A'\ B'\ C'\ D') = (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) \qquad (\S\ 16).$$

donc (ABCD) = (A′B′C′D′) ce qu'il fallait démontrer.

Le rapport anharmonique (ABCD) se nomme le rapport anharmonique des quatre plans. En supposant que la droite Δ soit perpendiculaire à la droite L et en appelant par exemple $P_1\,P_3$ l'angle des deux plans P_1 P_3 on voit que :

$$(ABCD) = \frac{\text{Sin } P_3\,P_1}{\text{Sin } P_3\,P_2} : \frac{\text{Sin } P_4\,P_1}{\text{Sin } P_4\,P_2}$$

§ **20.** — Conséquences du théorème fondamental. — 1° *Si deux systèmes de quatre points en ligne droite ABCD AB′C′D′ ont un point commun. A et si les rapports anharmoniques (ABCD) (AB′C′D′) sont égaux, les droites B′B′ et DD′ concourent en un même point.*

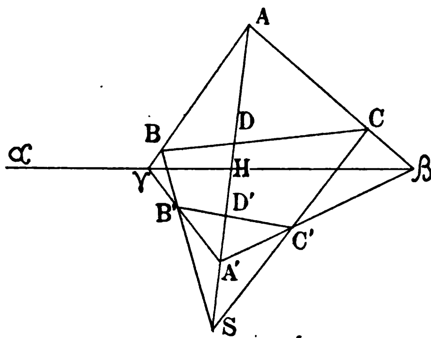
Désignons par S le point où se coupent BB′ CC′ DD′ par D_1 le point ou SD′ rencontre la droite ABCD. Dans le faisceau S (ABCD) coupé par deux droites, on a (§ 16) $(ABCD_1) = (AB'C'D')$ et comme par hypothèse (ABCD) = (AB′C′D′), il en résulte $(ABCD) = (ABCD_1)$ c'est-à-dire $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} : \frac{D_1A}{D_1B}$; d'où $\frac{DA}{DB} = \frac{D_1A}{D_1B}$; donc (§ 6) les points D et D_1 coïncident. SD′ et SD coïncident donc et par suite DD′ passe par le point S *(ce qu'il fallait démontrer)*.

§ **21.** — 2° *Soient quatre droitres $\alpha\beta\gamma\delta$ passant par un même point, c'est un faisceau de quatre droites. Si deux faisceaux de quatre droites $\alpha\beta\gamma\delta$ $\alpha\beta\gamma\delta$ ont un rayon commun α, si les rapports anharmoniques, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ $(\alpha\beta\gamma\delta)$ sont égaux, les points de rencontre de β et β' de γ et de γ et de δ et δ' sont en ligne droite.*

Soient O et O'. les sommets des deux faisceaux, P le point ou β coupe β', Q le point ou γ coupe γ', PQ coupe δ en R_1 et δ' en R_2 A le point où PQ coupe α. Le rapport anharmonique du 1[er] faisceau est $(APQR_1)$ celui du second est $(APQR_2)$ donc $(APQR_1) = (APQR_2)$ ou $\frac{QA}{QP} : \frac{R_1A}{R_1P} = \frac{QA}{QP} : \frac{R_2A}{R_2P}$ d'où $\frac{R_2A}{R_2P} = \frac{R_1A}{R_1P}$, donc les points R_1 et R_2 coïncident, donc δ et δ' coupent PQ au même point, ce qu'il fallait démontrer.

Applications des deux principes précédents

§ **22.** — Propriétés des triangles homologiques. — *Considérons deux triangles* ABC, A'B'C'. *J'appellerai toujours dans ce qui suit α le point de*



concours de BC *et* B'C', β *celui de* CA, C'A', γ *celui de* AB, A'B', P *la droite* AA', Q *la droite* BB', R *la droite* CC'. *On a alors la double proposition suivante :*

Si P, Q, R concourent en un même point S, α, β, γ, sont sur une même droite L, et réciproquement.

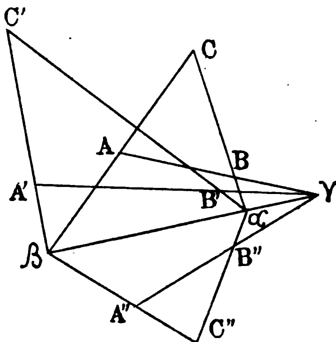
Supposons d'abord que P Q R concourent en S ; soient D et D′ les points où P coupe BC et B′C′, les droites PQR et Sα sont coupées en DBCα par BC, en D′B′C′α, par B′C′ donc (DBCα)=(D′B′C′α); dès lors les deux faisceaux A(DBCα) A′(D′B′C′α) ont même rapport anharmonique, et la droite P qui contient A,D,D′ étant un rayon commun, AB, A′B′, AC, A′C′, Aα, A′α, se coupent en trois points en ligne droite; α β γ sont donc en ligne droite (*ce qu'il fallait démontrer*).

Supposons ensuite que α β γ soient sur une même droite L, il en résultera que les deux faisceaux A(DBCα) A′ (D′B′C′α) auront tous deux pour rapports anharmonique H γ β α, H étant le point ou ADD′ coupe L; donc DBC α = D′B′C′ α, donc DD′ ou AA′, BB′, CC′ sont concourantes (*ce qu'il fallait démontrer*).

Lorsque deux triangles sont dans les conditions du théorème précédent on dit qu'ils sont homologiques, S est le centre d'homologie, L l'axe d'homologie. Nous étudierons l'homologie dans un chapitre spécial, nous bornant pour l'instant à faire connaître deux propriétés des triangles homologiques.

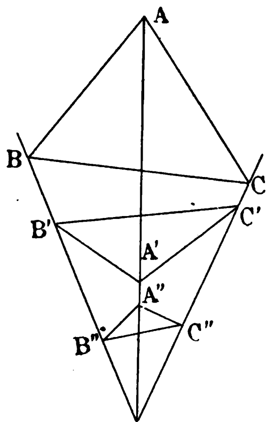
§ 23. — Théorème. — *Si deux triangles* ABC, A′B′C′, *sont homologiques d'un troisième* A″B″C″ *avec le même axe d'homologie, ils sont aussi homologiques entre eux et les trois centres d'homologie de ces trois triangles pris deux à deux sont en ligne droite.*

Pour le démontrer, je remarque d'abord que AB coupant l'axe d'homologie L en γ, A′B′ le coupe aussi en γ, ainsi que A″B″ parceque AB et A″B″ doivent se couper sur L ainsi que A′B′ et A″B″. De même BC B′C′ B″C″ coupent L au même point α, CA C′A′ C″A″ coupent L au même point β. Ceci fait voir d'abord que les deux figures ABC A′B′C′ sont homologiques puisque leurs côtés correspondants se coupent en 3 points α β γ situés sur une même droite L.



Considérons maintenant le triangle AA'A'' et le triangle BB'B'', les lignes AB A'B' AB A''B'' A'B' A''B'' concourent en γ. Donc ces deux triangles sont homologiques, donc AA' et BB' AA'' et BB'' A'A'' et B'B'' se coupent en 3 points P_3 P_2 P_1 en ligne droite, or P_3 est justement le centre d'homologie de ABC A'B'C', P_2 celui de ABC A''B''C'', P_1 celui de A'B'C' A''B''C''; le théorème est donc démontré.

Théorème. — Si deux triangles ABC A'B'C' sont homologiques d'un troisième A''B''C'', avec le même centre d'homologie, ils sont aussi homologiques entre eux et les trois axes d'homologie de ces trois triangles pris deux à deux concourent au même point.



En premier lieu les points A et A' étant en ligne droite tous les deux avec A'' et le centre S d'homologie, la droite AA' passe par S. De même BB' et CC' passent par S, ce qui prouve que ABC et A'B'C' sont homologiques.

Considérons maintenant le triangle formé des droites BC, B'C', B''C'' et le triangle formé par les droites CA C'A' C''A''; le point C où se coupent BC et CA, le point C' où se coupent B'C' et C'A', le point C'' où se coupent B''C'' et C''A'' sont par hypothèse sur la droite SC, donc les deux triangles considérés ci-dessus sont homologiques puisque leurs côtés correspondants se coupent sur SC; donc la droite joignant le point de rencontre de BC et B'C' au point où se coupent CA C'A', celle qui joint le point de rencontre de BC B''C'' au point où se coupent CA C''A'', celle qui joint le point de rencontre de B'C' B''C'' au point où se coupent C'A' C''A'' concourent. Or ces trois droites sont les axes d'homologie des trois triangles donnés pris deux à deux; le théorème est donc démontré.

§ **24.** — 2° Faisceaux harmoniques. Propriété fondamentale du quadrilatère complet. — *Si le rapport anharmonique d'un faisceau*

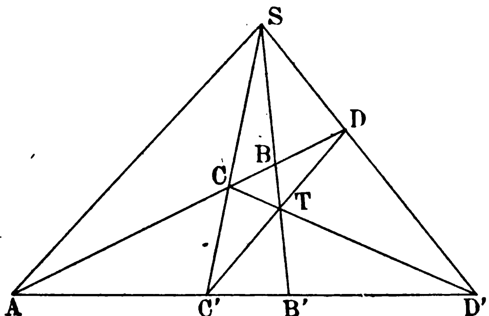
S(ABCD) *est égal à* — 1, *on dit que les droites* SA *et* SB *sont conjuguées l'une de l'autre par rapport à* SC *et* SD, *ou bien que* SC *et* SD *sont conjuguées par rapport à* SA, SB. *Dans ce cas une sécante quelconque coupe les droites en quatre points conjugués harmoniques.*

Supposons que dans le rapport $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$, CA et DA croissent indéfiniment le point A s'éloignant ; $\frac{CA}{DA}$ aura pour limite l'unité, car $\frac{CA}{DA} = \frac{CD + DA}{DA} = 1 + \frac{CD}{DA}$ et $\frac{CD}{AD}$ tend vers zéro. Donc $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ tend vers $\frac{DB}{CB}$. Si donc dans une division harmonique le point A est à l'infini on aura $\frac{DB}{CB} = -1$ ou CB = BD. Le conjugué de A est le milieu de CD.

On reconnaîtra donc qu'un faisceau est harmonique à ce qu'en menant une parallèle à SA, le point où elle coupe SB est le milieu de ceux où elle coupe SC et SD.

§ 25. — *Etant données trois droites* SA, SC *et* SD, *proposons-nous de construire la droite conjuguée de* SA *par rapport à* SC *et* SD.

Par un point A pris arbitrairement sur SA menons deux sécantes ACD AC'D' qui coupent SC et SD la première en C et D la seconde en C' et D'.



La droite cherchée doit passer par S, par le point B conjugué de A par rapport à C et D, par le point B' conjugué de A par rapport à C' et D'. Soit T le point où se coupent DC' et D'C, les points B

et B′ étant conjugués de A par rapport à C et D et par rapport à C′ et D′ sont sur la droite conjuguée de TA par rapport à TDC′, TD′C, donc la droite BB′ passe par T. Cette droite est donc la droite ST.

Considérons l'ensemble des quatre droites SDD′ SCC′ TDC′ TD′C, ces quatre droites forment ce qu'on nomme un quadrilatère complet, ST CD et C′D′ sont les diagonales ; on voit donc que dans un quadrilatère complet chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.

En faisant jouer à S le rôle de A et à A le rôle de S on verrait que T et S sont conjugués par rapport à B et B′.

On donne quelquefois aux diagonales d'un quadrilatère complet le nom de faux côtés.

La figure formée de quatre points D C D′ C′ s'appelle un quadrangle complet, A S et T sont les faux sommets. Il résulte de ce qui précède, que les 3 faisceaux S(ATCD),T(ASCD), A (STCC′) sont harmoniques; donc, dans un quadrangle complet, les droites joignant un faux sommet aux deux autres sont divisées harmoniquement par les côtés qui aboutissent à ce faux sommet. Il y a dans un quadrangle complet six côtés (CD, C′D′, CC′, DD′ CD′ DC′) de même qu'il y a six sommets dans un quadrilatère complet.

§ **26**. — Avant de passer aux applications qui vont suivre, je vais démontrer unê propriété du rapport anharmonique.

Supposons que l'on ait $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A}{C'B} : \frac{D'A}{D'B}$

cette relation peut s'écrire $\frac{CA}{CB} : \frac{C'A}{C'B} = \frac{DA}{DB} : \frac{D'A}{D'B}$

c'est-à-dire que l'égalité (ABCD) = (ABC′D′) entraîne (ABCC′) = (ABDD′)

En joignant les points A B C D à un point S on a une propriété analogue relative au rapport anharmonique de deux faisceaux ayant deux rayons communs

Propriétés des hexagones de Pascal et de Brianchon. Remarques sur la dualité.

§ **27.** — 1° Hexagone de Pascal. — Soit un hexagone dont les *sommets* sont A B C D E F. Nous désignerons par AB la droite allant de A en B, par A(CDEF) le faisceau de sommet A formé des droites AC AD AE AF. Cet hexagone sera dit de Pascal si l'on a l'égalité

(1) $$A\,(CDEF) = B\,(CDEF)$$

dans cette égalité, les sommets A et B jouent un rôle particulier; je dis qu'on peut faire jouer ce rôle à deux sommets quelconques; je vais démontrer d'abord que l'égalité (1) entraîne la suivante :

(2) $$C\,(ABEF) = D\,(ABEF)$$

En effet, supposons que AC coupe EF en α, AD coupe EF en β, BC coupe EF en γ, et BD coupe EF en δ, l'égalité (1) entraîne (en coupant par EF)

(3) $$(\alpha\beta\ EF) = (\gamma\delta\ EF)$$

ou en vertu de la remarque faite ci-dessus

(4) $$(\alpha\gamma\ EF) = (\beta\delta\ EF)$$

d'où $C\,(\alpha\gamma EF) = D\,(\beta\delta EF)$
mais $C\alpha$, $C\gamma$ $D\beta$ $D\delta$ sont précisément CA CB DA DB; donc:

(5) $$C\,(ABEF) = D\,(ABEF)$$

ce qui démontre la proposition.

On aura aussi

(6) $$A\,(BDEF) = C\,(BDEF)$$

en effet, d'après ce qu'on vient de démontrer, l'égalité (1) entraînera

$$E\,(BDAC) = F\,(BDAC)$$

et l'égalité précédente entraînera l'égalité (6)

§ **28.** — Hexagone de Brianchon. — Soit un hexagone dont les *côtés* sont A B C D E F. Nous désignerons par AB le point de rencontre de A et de B, par A (CDEF) le système de points situés sur la droite A formé des points AC AD AF. Cet hexagone sera dit de Brianchon si l'on a l'égalité.

(1) A (CDEF) = B (CDEF)

Dans cette égalité, les côtés A et B jouent un rôle particulier. Je dis qu'on peut faire jouer ce rôle à deux côtés quelconques. Je vais démontrer d'abord que l'égalité (1) entraîne la suivante :

(2) C (ABEF) = D(ABEF)

En effet, supposons que la droite qui joint AC à EF soit α, celle qui joint AD à EF soit β, celle qui joint BC à EF soit γ et celle qui joint BD à EF soit δ. L'égalité (1) entraine (en joignant au sommet EF)

(3) ($\alpha\beta$EF) = ($\gamma\delta$EF)

ou en vertu de la remarque faite ci-dessus

(4) ($\alpha\gamma$EF) = ($\beta\delta$ EF)

d'où C ($\alpha\gamma$EF) = D($\beta\delta$EF)

mais les points Cα Cγ Dβ Dδ sont précisément CA CB DA DB.

(5) donc C (ABEF) = D (ABEF) *(ce qu'il fallait démontrer)*

on aura aussi

(6) A (BDEF) = C (BDEF)

En effet, d'après ce qu'on vient de démontrer, l'égalité (1) entraînera

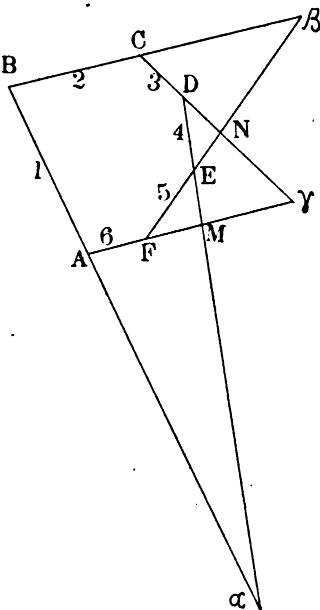
E (BDAC) = F (BDAC)

et cette dernière égalité entraînera l'égalité (6).

En comparant les deux propositions précédentes et leurs démonstrations, on voit qu'elles se transforment l'une dans l'autre en changeant la signification des lettres, de telle sorte que ce qui désignait des points dans la première, désigne des droites dans la seconde et inversement. Deux pareilles propositions sont dites corrélatives. Voici encore deux

propositions corrélatives, relative l'une à un hexagone de Pascal, l'autre à un hexagone de Brianchon.

§ 29. — 1° Dans un hexagone de Pascal, les points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite.



C'est-à-dire que si nous numérotons les *côtés* AB 1, BC 2, CD 3, DE 4, EF 5, FA 6; le point α où se coupent 1 et 4, le point β où se coupent 2 et 5, le point γ où se coupent 3 et 6 sont en ligne droite.

Prenons les sommets A et C qui ne sont ni opposés, ni consécutifs; de ce que l'hexagone est de Pascal, on déduit :

(1) $A(BDEF) = C(BDEF)$

AB coupe par hypothèse DE en α, AD coupe DE en D, AE coupe DE en E, soit M le point où AF coupe DE, on aura

(2) $A(BDEF) = (\alpha DEM)$

de même CA coupe EF en β, soit N le point où CD coupe EF, CE et CF coupent EF aux points E et F, donc

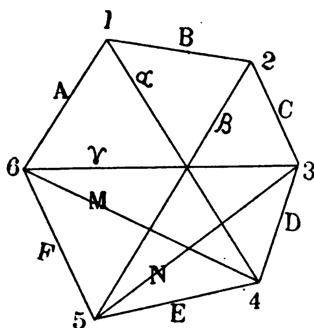
(3) $C(BDEF) = (\beta NEF)$

Des égalités (1) (2) et (3) on déduit :

(4) $(\alpha DEM) = (\beta NEF)$

le point E étant commun à ces deux divisions, $\alpha\beta$, DN, MF se coupent au même point. Or, N est sur CD, DN c'est CD, de même M est sur FA MF c'est A F, le point de rencontre de DN et MF est donc γ, donc $\alpha\beta$ passe par γ *(ce qu'il fallait démontrer)*.

§ **30**. — 2° Dans un hexagone de Brianchon les droites joignant les sommets opposés concourent en un même point.



C'est-à-dire que si nous numérotons les *sommets*: AB1 BC2 CD3 DE4 EF5 FA 6, la droite α qui joint 1 et 4 la droite β qui joint 2 et 5, la droite γ qui joint 3 et 6, sont concourantes.

Prenons les côtés A et C qui ne sont ni opposés ni consécutifs.

De ce que l'hexagone est de Brianchon, on déduit:

(1) A (BDEF) = C (BDEF)

La droite joignant AB à DE est par hypothèse α, la droite qui joint AD à DE est D, la droite qui joint AE à DE est E, soit M la droite joignant AF à DE, on aura:

(2) A (BDEF) = (α DEM)

De même la droite joignant CB à EF est β, soit N la droite joignant CD à EF, les droites joignant CE et CF à EF sont E et F ; d'où

(3) C (BDEF) = (βNEF)

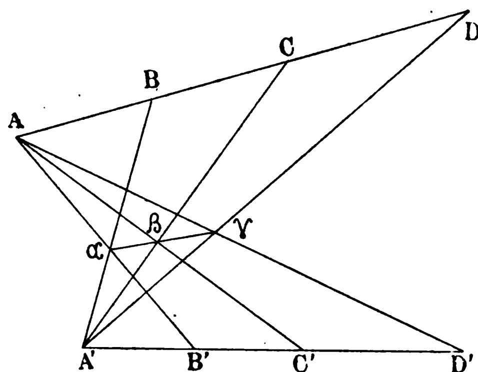
Des égalités (1) (2) et (3) on déduit

(α DEM) = (βNEF)

La droite E étant commune à ces deux faisceaux, les points $\alpha\beta$, DN, MF sont en ligne droite, or N passe par CD, DN c'est CD, de même M passe par AF, MF c'est AF, la droite joignant MF à DN est donc γ, donc le point $\alpha\,\beta$ est sur γ (*ce qu'il fallait démontrer*).

§ **31**. — Nous terminons ce chapitre par la construction du point qui, associé à 3 autres, donne un rapport anharmonique égal à un rapport anharmonique donné. Cette construction peut se faire avec la règle seule.

Soient ABCD quatre points en ligne droite, A' B' et C' trois autres points également en ligne droite, on propose de construire le point D' tel que (ABCD) = (A'B'C'D').



Nous supposons d'abord que les points A'B'C' ne sont pas sur la droite ABCD.

Si l'on considère les deux faisceaux A ' (ABCD) et A(A'B'C'D') ils ont un rayon commun AA' et leurs rapports anharmoniques doivent être égaux. Par suite si α est le point de rencontre de A'B et de AB', β celui de A'C et de AC' γ celui de A'D et de AD', α β γ doivent être en ligne droite, comme le point D' est seul inconnu, le point γ sera donné par l'intersection de $\alpha\beta$ et de A'D; en joignant Aγ on aura la droite AD' qui coupe A'B'C' au point D' cherché.

Supposons maintenant que A'B'C' soient sur la droite ABCD; prenons un point S quelconque; joignons SA SB SC et SD ; et coupons ce faisceau par une droite quelconque, on aura ainsi quatre points A_1 B_1 C_1 D_1 et on sera ramené au problème précédent.

Il y a d'autres constructions ; ce qui précède a seulement pour but de montrer que la construction est possible avec la règle seule.

TROISIÈME LEÇON

Pôle et polaire par rapport à un cercle;
Polaire réciproques dans le plan ;
Pôle et plan polaire par rapport à une sphère;
Polaires réciproques dans l'espace;
Dualité.

§ **32.** — A chaque point A du plan, nous allons faire correspondre une droite de la façon suivante. Désignons par O un point fixe que nous nommerons le *centre*; par k une certaine constante. Joignons A au point O et sur la droite OA, prenons le point P tel que l'on ait en grandeur et en signe, $OP \times OA = k$, enfin par le point P menons une droite D perpendiculaire à OP. C'est cette droite que nous ferons correspondre au point A. Nous la nommerons *polaire* du point A, et le point A s'appellera *pôle* de la droite D. Remarquons que si k est *positif*, A et P sont du *même côté* du centre O, mais qu'ils sont de côtés *différents* si k est *négatif*.

§ **33.** — 1° *Si la polaire d'un point* A *passe par un point* B, *la polaire du point* B *passe par le point* A.

Construisons, comme il est dit ci-dessus, la polaire D de A, qui est perpendiculaire sur OA et coupe OA en P. Supposons qu'elle passe par B. Joignons OB, menons du point A une perpendiculaire sur OB, rencontrant OB au point Q. Je vais démontrer que AQ est la polaire de B; il faut pour cela faire voir que $OQ \times OB = k$.

Or, les deux triangles OPB, OQA, tous les deux rectangles, ont un angle aigu égal. (Si $k > 0$ ils ont un angle aigu commun, si $k < 0$ leurs

angles en O sont opposés par le sommet.) Ces deux triangles étant semblables on a $\frac{OA}{OB} = \frac{OQ}{OP}$ ou $OA \times OP = OB \times OQ$
Or le premier membre est égal à k par hypothèse; on a donc :

$$OB \times OQ = k$$

En outre si $k > 0$, OB et OQ sont de même signe, ils sont de signes contraires si $k < 0$, l'égalité est donc vraie en signe. Ce qui démontre la proposition.

On peut déduire de cette proposition les deux corollaires suivants. Soit D une droite passant par un point A, B le pôle de D, Δ la polaire de A. Si D tourne autour de A, B décrira la droite fixe Δ. Si A décrit D, Δ tourne autour de B. Par conséquent, si un point décrit une droite, sa polaire tourne autour d'un point fixe, pôle de cette droite. Si une droite tourne autour d'un point, son pôle décrit une droite polaire de ce point.

§ **34.** — 2° *Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal à celui de leurs quatre polaires.*

En effet, soient A B C D quatre points sur une droite Δ, $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ leurs quatre polaires, qui passent par le pôle P de Δ, on a

$$(ABCD) = O(ABCD)$$

or le faisceau O (ABCD) s'obtient en faisant tourner d'un angle droit celui des quatre polaires, et le transportant ensuite parallèlement à lui-même. On a donc :

$$O(ABCD) = (\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta)$$

donc $(ABCD) = (\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta)$ (*ce qu'il fallait démontrer*).

§ **35.** — Cas où la constante K est positive. — Quand la constante K est positive, posons $K = R^2$, et considérons un cercle décrit de O comme centre, avec R pour rayon.

Soit A un point, D sa polaire, et B un point de cette droite, choisi de façon que AB coupe le cercle en P et Q. Je dis que P et Q sont conjugués harmoniques par rapport A et B.

Menons BE perpendiculaire sur AO, OH perpendiculaire sur AB de façon que H est le milieu de PQ.

Les triangles BAE AOH ayant un angle aigu commun sont semblables, et l'on a :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AO}{AH}$$

ou bien $AO \times AE = AB \times AH$, et cette égalité a lieu aussi en signe. Remplaçons AE par OE — OA, AB par HB — HA; l'égalité précédente deviendra :

$$OA\,[OA - OE] = HA\,[HA - HB]$$

comme $OA \times OE = R^2$ et que $OA^2 - HA^2 = OH^2$ il vient :

$$HA \times HB = R^2 - OH^2$$

Si comme on l'a supposé on a $R > OH$, on a aussi $R^2 - OH^2 = HP^2$ et par suite $HA \times HB = HP^2$.
Ce qui démontre la proposition.

Si la droite ne coupait pas le cercle, on aurait tout de même la relation :

$$HA \times HB = R^2 - OH^2$$

nous dirons encore, et ceci devra être considéré jusqu'à nouvel ordre comme une simple locution, que les points A et B sont *conjugués* par rapport aux deux points *imaginaires* où la droite AB coupe le cercle. Ce n'est là qu'une manière d'énoncer l'égalité précédente.

§ 36. — Cas ou la constante k est négative. — Si la constante k est négative, on peut poser $k = -h^2$. Elevons au plan de la figure par le point O une perpendiculaire OS égale à h. Soit A un point, D sa polaire, P le point où OA rencontre D. D'après l'hypothèse on a $OA \times OP = -h^2$, ce qui prouve que le triangle ASP est rectangle en S. Comme OP est perpendiculaire sur D, il en est de même de SP d'après le théorème des trois perpendiculaires. SP étant perpendiculaire sur D, le plan SOP (et par suite sur SA situé dans ce plan) est perpendiculaire sur D. Donc le plan SD est perpendiculaire à SA.

La droite D se déduit donc du point A par la construction suivante :

On joint AS et par S on mène un plan perpendiculaire à cette droite ; ce plan coupe, suivant la droite D, le plan de la figure.

§ **37.** — Courbes polaires réciproques. — Considérons une ligne brisée polygonale dont les sommets sont A B C D, et soient $\alpha\beta\gamma\delta$ les polaires de ses sommets ; le point $\alpha\beta$ où se coupent les droites α et β étant à la fois sur la polaire de A et sur celle de B, a pour polaire la droite AB (§33). Ces polygones ABCD $\alpha\beta\gamma\delta$ sont réciproques. Les côtés de l'un ont pour pôle des sommets de l'autre, et inversement.

Au lieu d'une ligne brisée, considérons une ligne courbe C ; menons la tangente en A à cette courbe, soit A_1 son pôle. Quand A se déplacera sur la courbe C, le point A décrira une certaine courbe C_1. Je vais démontrer que la tangente à C_1 au point A_1 a pour pôle le point A. En effet, soit B un point voisin de A, B_1 le pôle de la tangente en B, D le point où se coupent les tangentes en A et en B. Les tangentes en A et B passant par D, la polaire de D passe par les pôles A_1 et B_1, de ces tangentes, c'est donc A_1B_1. Quand B vient en A, il en est de même de D un point d'une courbe pouvant être considéré comme le point d'intersection de deux tangentes infiniment voisines. Alors B_1 se rapproche de A_1, et la droite A_1 B_1 devient la tangente en A_1, qui est ainsi la polaire de A (position limite de D).

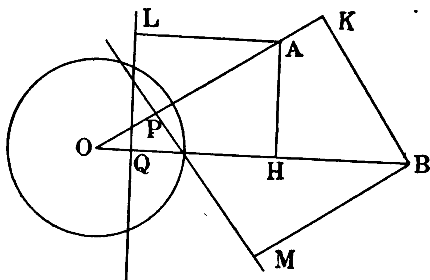
(Nous nous appuyons sur ce fait facile à constater que la position limite de la polaire d'un point est la polaire de la position limite de ce point).

Les deux courbes C et C_1 se nomment deux courbes *polaires réciproques*.

§ **38.** — Polaire réciproque d'un cercle. — Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Le rapport des distances de deux points A *et* B *au centre* O *est égal au rapport des distances de chacun de ces points à la polaire de l'autre.*

Soit P le point où la polaire de A rencontre OA, Q celui où la polaire de B rencontre OB, on a : $OA \times OP = R^2$, $OB \times OQ = R^2$.



Du point B menons BM perpendiculaire sur la polaire de A, et la coupant en M; menons de même AL perpendiculaire sur la polaire de B et la coupant en L. Enfin supposons que la parallèle menée par A à la polaire de B coupe OB en H, et que la parallèle menée par B à la polaire de A coupe OA en K. De cette façon ALQH, BMPK sont des rectangles, et l'on aura (§ 4)

$$OP = OK - PK$$

Or $PK = MB$ comme côtés opposés d'un rectangle, donc

$$OP = OK - MB$$

pour la même raison, $OQ = OH - LA$.

La relation $OA \times OP = OB \times OQ$ donne alors :

$$OA \times [OK - MB] = OB\,[OH - LA]$$

Mais les triangles rectangles semblables OBK, OAH donnent :

$\frac{OA}{OB} = \frac{OH}{OK}$ ou $OA \times OK = OB \times OH$ (ceci a lieu aussi en signe)

il reste donc dans l'égalité précédente :

$$OA \times BM = OB \times AL$$

ou encore :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AL}{BM}$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ **39**. — Considérons maintenant un cercle de centre C et de rayon a : soit T une tangente, Δ la polaire de C, M le pôle de T. Désignons par le signe $M_1\Delta$ la distance du point m à la droite Δ. On aura d'après le lemme ci-dessus :

$$\frac{Om}{OB} = \frac{M_1\Delta}{a}$$

ou bien :

$$\frac{Om}{M_1\Delta} = \frac{OC}{a}$$

$\frac{OC}{a}$ est une constante que nous désignerons par e. Le lieu cherché, polaire réciproque du cercle C est donc le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe O et à une droite fixe Δ est égal à une constante e.

Nous verrons plus tard qu'une telle courbe est une section conique. O est un foyer, Δ une directrice, e l'excentricité.

On peut voir dans quel cas la courbe a des branches infinies. On voit sans peine que si T vient passer par O, le point M s'éloigne à l'infini dans une direction perpendiculaire à T.

Or si O est extérieur au cercle C, deux tangentes T passent par O, il y aura donc sur la courbe deux points à l'infini. Il en sera ainsi si $OC > a$ ou $e > 1$. Si $OC = a$, (ou $e = 1$) les deux directions se réduisent à une seule. Si $e < 1$ il n'y a plus de tangentes issues de O à C, partant plus de branches infinies. On a ainsi les trois formes de sections coniques, *hyperbole*, *parabole*, *ellipse*.

§ **40**. — Pole et plan polaire par rapport a une sphère. — *Donnons-nous maintenant dans l'espace un centre* O *et une constante* K ; *à tout point* A *de l'espace nous ferons correspondre un plan* P *de la façon suivante:*

Prenons sur OA un point H, tel que $OH \times OA = K$, (en grandeur et signe) et par ce point nous mènerons le plan P per-

pendiculaire sur OH. Le plan P ainsi construit sera le plan polaire de A.

Si on mène par OA un plan quelconque, il coupera le plan P suivant une droite D, perpendiculaire à OH, de sorte que dans ce plan D sera la polaire de A. Cette propriété permet de ramener l'étude du plan polaire à celle de la polaire dans le plan. Ainsi :

1° *Si le plan polaire d'un point* A *passe par un point* B, *le plan polaire de* B *passe par* A*;* en effet le plan AOB coupe le plan polaire suivant deux droites qui sont les polaires respectives de A et de B, et l'on est ainsi ramené à ce théorème démontré antérieurement, que si la polaire de A passe par B, celle de B passe par A.

§ **41.** — 2° Supposons que plusieurs points soient en ligne droite sur une droite D, il est facile de voir ce que sont leurs plans polaires. Ils sont d'abord tous perpendiculaires au plan OD puisque chacun d'eux est perpendiculaire à une droite de ce plan ; de plus si de O on abaisse une perpendiculaire sur D, qui coupe D en K, et si on prend sur cette droite le point L tel que $OK \times OL = k$ les plans polaires passeront tous par L, parce que le plan polaire de L contient D ; tous ces plans passeront donc par une même droite menée par L perpendiculaire à D, soit Δ cette droite. Ces deux droites sont dites *conjuguées*.

On voit que deux droites conjuguées D Δ sont rectangulaires entre elles et perpendiculaires toutes deux à l'intersection des plans OD, OΔ. Enfin le produit des distances $OD \times O\Delta$ est en grandeur et signe égal à K. Quand un point est sur l'une de ces droites son plan polaire passe par l'autre.

§ **42.** — 3° *Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal à celui de leurs quatre plans polaires.* — On le voit de suite en coupant par le plan qui contient la droite et passe par O. On est ramené au théorème analogue de géométrie plane.

§ **43.** — Cas ou la constante k est positive. — Si la constante k est positive, on peut poser $k = R^2$, et considérer une sphère de rayon R ayant le point O pour centre. Si une sécante passant par A coupe en B le plan polaire de A et rencontre la sphère en P et Q, P et Q seront conjugués harmoniques par rapport à A et B. On le voit de suite en coupant par le plan OAB.

§ **44.** — Polaires réciproques dans l'espace. Dualité. — A un point A de l'espace faisons correspondre son plan polaire α. Aux différents points A d'un plan P, correspondront des plans α, passant par le pole ω de P ; car si le plan polaire P de ω passe par A, le plan polaire de A passe par ω. Aux différents points d'une droite correspondront des plans passant par la droite conjuguée. Considérons une surface S non développable, c'est-à-dire une surface qui n'est touchée qu'en un point par ses plans tangents. Le lieu des pôles des plans tangents à la surface S sera alors une surface Σ que l'on nomme la *polaire réciproque* de S. *Il y a réciprocité entre* S *et* Σ, *c'est-à-dire que la surface* S *est le lieu des pôles des plans tangents à* Σ.

Pour démontrer cette proposition, désignons par A un point de S, par T son plan tangent, par θ le pôle de T. Prenons sur S deux points A′ et A″ voisins de A, nous désignerons par T′ T″ les plans tangents en ces points, par $\theta' \theta''$ leurs pôles. Nous ferons tout à l'heure tendre A′ et A″ vers A. Nous supposerons que ces points tendent vers A de façon que le point de rencontre de T T′T″ ait une position limite bien déterminée, c'est-à-dire que la position limite de la droite d'intersection de T et T″ ne soit pas la même que celle de T et de T′.

Soit D le point où se coupent TT′T″, ω le plan polaire de D, de ce que T,T′,T″ passent par D, on conclut que ω contient $\theta\, \theta'\, \theta''$, mais quand A′ A″ tendent vers A, le point D tend vers A, et le plan ω vers le plan polaire de A, le plan limite de θ, θ', θ'', est d'ailleurs bien déterminé d'après l'hypothèse faite ; il coïncide donc avec le plan ω polaire de A. Mais ce plan limite est le plan tangent en θ, ce qui démontre la proposition.

§ **45.** — Supposons maintenant que la surface soit une *développable*, c'est-à-dire que ses plans tangents la touchent non pas en un seul point, mais suivant une droite. Pour voir ce qui se passe dans ce cas, observons que si deux surfaces sont inscrites dans cette développable, de façon que tout plan tangent à la développable touche à la fois ces deux surfaces, les pôles de ces plans tangents seront à l'intersection des deux polaires réciproques des deux surfaces considérées. Ainsi le lieu des pôles des plans tangents d'une développable Δ n'est plus une surface mais une courbe C. A la droite d'intersection de deux plans tangents T et T', correspondra la droite joignant leurs pôles $\theta\,\theta'$. Quand T' se rapprochera de T, la droite TT' sera une droite située sur la développable, la droite $\theta\theta'$ deviendra alors la tangente en θ à la courbe. Ainsi à une génératrice de la développable Δ correspond une tangente à la courbe C. A un plan passant par une tangente à C correspondra un point sur la droite qui correspond à cette tangente; ainsi aux points de Δ correspondent des plans passant par des tangentes à C, que l'on nomme aussi des plans tangents à C.

§ **46.** — Si Δ est un *cone*, tous ses plans tangents passent par son sommet ; la courbe correspondante a donc tous ses points dans le plan polaire du sommet, c'est une courbe plane.

Si Δ est un cylindre, son sommet est à l'infini, le plan polaire de ce sommet est le plan passant par O perpendiculaire aux génératrices du cylindre. La courbe correspondante est donc encore plane et son plan passe par O.

§ **47.** — En résumé :

La figure polaire réciproque d'une	Est une
Surface non développable......	Surface non développable
Développable.......	Courbe
Suface conique.................	Courbe plane
Surface cylindrique.....	Courbe plane dont le plan passe par O.

Le *principe de dualité* consiste dans ce fait qu'à une figure on peut

toujours faire correspondre une seconde figure dite *corrélative*, et telle qu'à des *points* et des *plans* de la 1re correspondent respectivement dans la seconde des *plans* et des *points*. Les propriétés de la première figure se traduisent par des propriétés de la seconde. Ainsi aux propriétés des points d'une courbe correspondent les propriétés des plans tangents à une développable.

Nous avons donné précédemment des exemples de dualité dans le plan. Nous rencontrerons des exemples de dualité dans l'espace, dans l'étude des surfaces du 2me ordre. Nous terminerons donc là ce chapitre dont les applications ultérieures feront mieux comprendre toute la portée.

QUATRIÈME LEÇON

Figures homologiques dans le plan et dans l'espace

§ **48.** — Dans le plan, considérons un point O et une droite D, que nous nommerons respectivement *centre* et *axe d'homologie* ; désignons en outre par K une constante que nous appellerons *constante d'homologie.* A étant un point d'une figure F, prenons sur la droite OA un point A' tel que, en désignant par α le point où OA coupe l'axe D d'homologie on ait $\frac{A'O}{AO} : \frac{A'\alpha}{A\alpha} = K$, ou bien $(O\alpha\, A'A) = K$.

Les points A' correspondants des différents points A de la figure F en formeront une autre F' qui sera dite *homologique* de F.

On voit que si D était à l'infini, on aurait simplement $\frac{A'O}{AO} = K$, et la figure F' serait la figure *homothétique* de F.

Deux points correspondants A *et* A' *sont en ligne droite avec le point fixe* O. Voici d'autres propriétés des figures homologiques.

§ **49.** — 1° *La figure homologique d'une droite* Δ *est une droite* Δ' *qui rencontre* Δ *sur l'axe d'homologie*. En effet, soit A un point de Δ, A' son homologue, B le point où Δ rencontre l'axe d'homologie ; M étant un point quelconque de Δ il s'agit de démontrer que son homologue est le point M' où A'B rencontre OM. Désignons par α et α' les points où OA et OM rencontrent l'axe d'homologie, on a, en coupant le faisceau BO α A'A par OA et par OM :

$$(O\,\alpha\,A'\,A) = (O\,\alpha'\,M'M)$$

Or, le premier membre est égal à K parce que A' est l'homologue de A, donc le second est aussi égal à K, et M' est l'homologue de M. Ce qu'il fallait prouver. On voit par ce qui précède, comment on construira l'homologue M' d'un point donné M, connaissant le centre, l'axe d'homologie, et deux points homologues, A et A'.

§ **50**. — 2° *Le rapport anharmonique des quatre points* ABCD *en ligne droite est égal à celui de leurs quatre homologues,* A' B' C' D'.

En effet, AA', BB', CC' concourant en O, chacun des deux rapports anharmoniques est égal à celui du faisceau O (ABCD).

§ **51**. — 3° *Le rapport anharmonique de quatre droites concourantes est égal à celui des quatre droites correspondantes.*

Soient en effet quatre droites concourantes coupant l'axe d'homologie aux points $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. Les quatre droites correspondantes couperont l'axe d'homologie aux mêmes points (§ 49), le rapport anharmonique des quatre droites données sera donc égal à celui des quatre points $\alpha \beta \gamma \delta$, de même que celui des quatre droites correspondantes ; d'où résulte la proposition à démontrer.

§ **52**. — 4° *Deux figures* F *et* F' *étant homologiques, le lieu des points de* F *dont les homologues dans* F' *sont à l'infini, est une droite* I *parallèle à l'axe d'homologie. De même le lieu des points de la seconde figure* F' *ayant leurs homologues dans* F *à l'infini, est une droite* J' *parallèle à l'axe d'homologie.*

Soient en effet A et A' deux points homologues, projetons ces points en H et H' sur une perpendiculaire menée par O à l'axe : AH et A'H' étant parallèles à cet axe, α étant le point où OA rencontre l'axe d'homologie, β le point où OH rencontre ce même axe, on aura $(O\alpha A'A) = k$; or $(O\alpha A'A) = (O\beta H'H)$ donc on a $(O\beta H'H) = K$ ou bien :

$$\frac{H'O}{H'\beta} : \frac{HO}{H\beta} = k$$

Si H' est à l'infini, le rapport $\frac{H'O}{H'\beta}$ est égal à l'unité, et l'on a : $1 : \frac{HO}{H\beta} = k$, égalité qui détermine le point H. Ce point étant fixe, le lieu de A est la droite I menée par H parallèlement à l'axe d'homologie. De même si H est à l'infini (A y étant par celà même) on a $\frac{H'O}{H'\beta} = k$. Le point H' est déterminé par cette égalité. Le lieu de A' est alors une

droite J′ menée parallèlement à l'axe d'homologie par le point H′ ainsi déterminé.

Les points à l'infini ayant leurs homologues en ligne droite, nous les considèrerons comme en ligne droite, et nous dirons la *droite de l'infini* en parlant des points à l'infini d'un plan.

§ **53.** — Etant donnés le centre et l'axe d'homologie, ainsi que l'une des deux droites I ou J′, proposons-nous de *construire l'homologue d'un point quelconque.*

M étant un point de la première figure, joignons OM, sur laquelle doit se trouver le point M′ que l'on cherche. Menons par M une perpendiculaire sur l'axe d'homologie, qui coupe cet axe en α et la droite I en G. L'homologue de G est à l'infini sur OG ; la droite homologue de MG doit passer par ce point, c'est-à-dire être parallèle à OG, et elle doit passer par α, c'est donc la parallèle menée par α à OG ; elle coupe OM au point M′ cherché.

Les deux triangles semblables OGM M′αM, donnent : $\frac{OM}{GM} = \frac{OM'}{G\alpha}$ et cette égalité a lieu aussi en signe. G α est une constante p ; GM est la distance de M à la droite I, donc le rapport des distances d'un point M au centre d'homologie et à la droite de la figure F, qui correspond à l'infini dans F′ est proportionnelle à la distance de M′ au centre d'homologie. (*Prière au lecteur de faire la figure.*)

Cette dernière propriété des figures homologiques donne immédiatement la figure homologique d'un cercle ayant pour centre le centre d'homologie. Nous supposerons, pour garder les mêmes notations que ci-dessus, que ce cercle appartient à la seconde figure. Alors c'est OM′ qui est constant, et la propriété ci-dessus montre qu'il en est de même de $\frac{OM}{GM}$.

Nous retrouvons ainsi le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant, lieu qui a déjà été étudié comme polaire réciproque d'un cercle.

§ **54.** Rapports entre l'homologie et la perspective. — Etant donnés un plan P dans l'espace et un point S hors de ce plan, si l'on join-

S à un point quelconque M de l'espace, le point M' où la droite SM perce le plan P est la *perspective* ou *projection conique* du point M sur le plan P. S est le *centre* de projection, P est le *plan* de projection.

La perspective d'une droite D est la droite D' intersection du plan P par le plan SD, car si M est sur D, la droite SM est dans le plan SD.

Considérons plus particulièrement une figure plane située dans un plan Q. Soit Δ l'intersection des plans P et Q. Une droite D située dans Q coupera Δ en α, et le point α sera à lui-même sa perspective, puisqu'il est dans le plan P ; D' passera donc par α ; si nous rabattons le plan Q sur le plan P, en le faisant tourner autour de Δ, D' ne cessera pas de passer par α. Deux droites correspondantes D et D' se couperont donc après rabattement sur une droite fixe Δ.

Mais alors les deux figures seront homologiques, car si nous prenons 3 points ABM et leurs 3 correspondants (rabattus) A'B'M', nous aurons deux triangles dont les côtés correspondants se coupent en 3 points en ligne droite. Il en résulte que AA' BB' MM' sont concourantes, donc quand M variera, la droite MM' ne cessera pas de passer par le point fixe où se coupent AA' et BB'.

Ceci suffit à démontrer l'homologie des deux figures, car si AA coupe Δ en β et si MM' coupe Δ en γ, et si O désigne le centre d'homologie, on aura α étant le point de concours de AM et A'M' sur Δ.

$$(O\,\beta\,AA') = \alpha\,(O\,\beta\,AA') = \alpha\,(O\gamma MM') = (O\gamma MM')$$

le rapport anharmonique $(O\gamma\,MM')$ est donc constant.

§ 55. — *Réciproquement* si deux figures sont homologiques et si autour de l'axe Δ d'homologie on fait tourner l'une des deux figures d'un angle quelconque, on aura deux figures perspectives l'une de l'autre.

Il suffit, pour le démontrer, de faire voir que chaque droite MM' joignant deux points homologues, passe par un point S fixe. Après le déplacement, les droites homologues ne cessent pas de se rencontrer sur Δ ; soit un triangle ABM et son homologue après déplacement A'B'M'. AB, AB' se coupant sur Δ sont dans un même plan H, de même AM, A' M' sont dans un plan H', BM, B'M' dans un plan H'' la

droite MM′ étant dans le plan H′ et dans le plan H″ est l'intersection de ces deux plans ; cette droite coupe H en un point S, qui est le point commun aux trois plans H H′ H″, et qui est sur AA′ intersection de H et H′, et sur BB′ intersection de H et de H″, donc la droite MM′ passe constamment par le point S où se coupent les deux droites fixes AA′ et BB′ *(ce qu'il fallait démontrer).*

§ **56**. — Si deux figures sont les perspectives d'une troisième figure (non plane), avec le même centre S de projection, elles sont évidemment perspectives l'une de l'autre ; donc, d'après la proposition précédente, en les ramenant dans le même plan, on les rend homologiques.

Homologie dans l'espace

§ **57**. — Nous considérons un plan P, et un point O, nommés plans et centre d'homologie ; enfin une constante k, dite constante d'homologie. Soit M un point d'une figure F, menons OM qui coupe P au point α, et prenons le point M′ tel que le rapport anharmonique (OαM′M) soit égal à k ; les points M′ correspondant aux différents points M de la figure F formeront une figure F′ dite l'homologique de F. Les propriétés de l'homologie dans l'espace sont analogues à celles de l'homologie plane.

§ **58**. — 1° *La figure homologique d'une droite* D *est une autr droite* D′ *rencontrant la première dans le plan d'homologie.*

En effet, menons par D et par le centre d'homologie un plan Q qui coupe le plan P suivant une droite Δ. On voit que la figure homologique de D sera la même que s'il s'agissait d'une homologie plane dans le plan Q, Δ étant l'axe d'homologie. Cette figure est donc une droite D′ qui coupe Δ au même point que D, et par conséquent D′ coupe le plan P au même point que D, puisque Δ est dans le plan P.

La proposition est donc démontrée.

§ **59.** — 2° *La figure homologique d'un plan* ω *est un plan* ω'; *la droite d'intersection de ces deux plans est dans le plan d'homologie.*

Soit A un point quelconque du plan ω, D la droite (qui peut être à l'infini) suivant laquelle il coupe le plan d'homologie, A' l'homologue de A, et B un point de la droite D. D'après le théorème précédent, la droite A'B est l'homologique de AB, mais quand B décrit la droite D, de façon que AB engendre le plan ω, A'B engendrera le plan ω' du point A' et de la droite D, ce qui démontre la proposition.

§ **60.** — 3° *Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal à celui de leurs quatre homologues.*

En effet, chacun des deux rapports est égal à celui des quatre droites joignant ces points au centre d'homologie.

§ **61.** — 4° *Le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites situées dans un même plan est égal à celui des quatre droites correspondantes.*

En effet, chacun de ces deux rapports est égal à celui des quatre points en ligne droite, où les droites rencontrent le plan d'homologie.

§ **62.** — 5° *Le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans passant par une même droite est égal à celui des quatre plans homologues.*

Car chacun d'eux est égal à celui des quatre droites suivant lesquelles ces plans coupent le plan d'homologie.

§ **63.** — 6° *Etant données deux figures homologiques* F *et* F', *le lieu des points de* F *qui ont leur homologue dans* F' *à l'infini est un plan* I, *parallèle au plan d'homologie; le lieu des points de* F' *dont les homologues dans* F *sont à l'infini est un autre plan* J' *également parallèle au plan d'homologie.*

Considérons en effet un plan Q passant par O et perpendiculaire au plan P d'homologie. Ce plan coupe les deux figures F et F' suivant

deux figures homologiques planes, car les droites homologues situées dans ce plan vont concourir sur la droite d'intersection des plans Q et P. Dans cette homologie plane, il y a deux droites i et j'; i par exemple est le lieu des points de F situés dans Q ayant leur homologue à l'infini. En faisant tourner Q autour de la perpendiculaire menée de O sur P, la droite i engendre un plan I, qui est le lieu des points de F dont les homologues dans F' sont à l'infini. De même on aura le plan J' engendré par la droite j' tournant autour de la perpendiculaire menée de O sur P.

§ **64.** — 7° *Si* M *et* M' *sont deux points homologues*, P *la distance de* I *à* P, on a :

$$\frac{OM}{Mi} = \frac{OM'}{P}$$

En effet, si nous menons par OMM' un plan perpendiculaire au plan d'homologie, cette relation a lieu pour les figures homologiques planes obtenues en coupant les figures F et F' par ce plan.

§ **65.** — 8° *Deux courbes planes homologiques l'une de l'autre, mais situées dans deux plans différents, peuvent toujours être placées de façon à être homologiques dans le même plan.*

En effet, la droite joignant deux points homologues passant par un point fixe, ces deux figures planes sont la perspective l'une de l'autre, et l'on sait que deux pareilles figures peuvent être placées de façon à être homologiques dans le même plan.

CINQUIÈME LEÇON

Homographie

§ **66**. — Considérons une droite L sur laquelle nous choisissons une *origine* A et un *sens positif* AX. Chaque point M de la droite sera défini par son *abcisse* AM que nous désignerons par x.

Si au lieu du point A on choisissait une nouvelle origine A_1 dont l'abcisse AA_1 est a, la nouvelle abcisse x_1 du point M serait liée à l'ancienne par la relation

$$AM + MA_1 + A_1A = 0 \text{ ou } AM = AA_1 + A_1M \text{ c'est-à-dire } x = a + x_1$$

On pourrait aussi définir le point M en donnant le rapport $\frac{PM}{MQ}$ des segments déterminés par le point M et deux points fixes P et Q ; si A désigne ce rapport, p et q les abcisses de P et Q on a, comme on l'a vu dans la première leçon (§ 6)

$$x = \frac{p + \lambda q}{1 + \lambda}$$

Enfin, on peut définir le point M en donnant le rapport anharmonique $\frac{MP}{MQ} : \frac{RP}{RQ}$ où P, Q et R sont trois points fixes de la droite.

Si l'on appelle μ cette quantité, et K le rapport constant $\frac{RP'}{RQ}$ on aura :

$$\lambda : K = \mu \text{ d'où } \lambda = \mu K \text{ et par suite } x = \frac{p + \mu K q}{1 + \mu K}$$

x est une fraction du premier degré en λ ou en μ, de sorte que si $x_1 x_2 x_3 x_4$ sont quatre valeurs de x, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ les quatre valeurs correspondantes de λ, $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4$ les quatre valeurs correspondantes de μ, on aura, d'après un *théorème du chapitre* I[er]

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}$$

§ 67. — Considérons maintenant une seconde droite L' sur laquelle on a choisi une origine B'; soit x' l'abcisse d'un point M de la droite.

S'il y a entre x et x' une relation de la forme:

(¹) $$Axx' + Bx + Cx' + D = 0$$

On dit que les points M et M' sont *deux points correspondants de deux divisions homographiques.* La relation précédente ne change pas de forme par un changement d'origine, c'est-à-dire si l'on pose $x = a + x_1$ $x' = b' + x'_1$.

Si A est nul, on dit que les deux divisions sont *semblables;* dans ce cas on voit que si x grandit indéfiniment, il en est de même de x' et inversement.

Si au contraire A n'est pas nul on a:

(²) $$x = -\frac{Cx' + D}{Ax' + B}$$

On voit que x grandit indéfiniment quand le dénominateur devient nul, c'est-à-dire quand x' devient égal à $-\frac{B}{A}$

On verra de même que x' devient infini quand x devient égal à $-\frac{C}{A}$

§ 68. — D'après la formule (²) x est une fraction du premier degré en x', donc d'après un théorème du chapitre premier, *le rapport anharmonique de quatre points* M *est égal à celui des quatre points correspondants* M'.

On peut encore démontrer cette proposition comme il suit. Choisissons sur la première droite pour origine le point I dont le correspondant est à l'infini sur la seconde droite, puis sur la deuxième droite le point J' ayant pour correspondant le point à l'infini de la premièree Avec ces origines $-\frac{B}{A}$ et $-\frac{C}{A}$ seront nulles, la relation (¹) se réduira donc à $Axx' + D = o$

ou bien $xx' = K$ en posant $-\frac{D}{A} = K$

On aura donc M et M' étant deux points correspondants :

(3) $$IM \times J'M' = K$$

Nous avons écarté le cas où I et J' seraient à l'infini ; dans ce cas, du reste, la vérification directe du théorème que nous allons démontrer serait bien facile, un segment joignant deux points M et M_1, étant dans un rapport constant avec le segment $M'M_1'$, formé des deux points correspondants.

Laissant donc de côté ce cas, on tire de (3) $J'M' = \frac{K}{IM}$

de même : $J'M' = \frac{K}{IM}$

par suite :

$$M'M'_1 = J'M'_1 - J'M' = \frac{K}{IM_1} - \frac{K}{IM} = \frac{K(IM - IM_1)}{(IM_1 \times IM)} = \frac{K\ M_1M}{IM_1 \times IM}$$

ou bien :

$$M'M'_1 = -\frac{K\ MM_1}{IM \times IM_1}$$

on aura de même :

$$M'M'_2 = -\frac{K\ MM_2}{IM \times IM_2}$$

et par suite : $\frac{M'M'_1}{M'M'_2} = \frac{MM_1}{MM_2} \times \frac{IM_2}{IM_1}$

on aura de même : $\frac{M'_0M'_1}{M'_0M'_2} = \frac{M_0M_1}{M_0M_2} \times \frac{IM^2}{IM_1}$

d'où par division :

$$\frac{M'M'_1}{M'M'_2} : \frac{M'_0M'_1}{M'_0M'_2} = \frac{MM_1}{MM_2} : \frac{M_0M_1}{M_0M_2}$$

ou $(M'_1M'_2M'M'_0) = (M_1M_2MM_0)$ *ce qu'il fallait démontrer.*

§ **69.** — Ce théorème admet une réciproque. *Si l'on a sur la droite* L *trois points* P Q R *et sur la droite* L' *trois points* P' Q' R', *si à tout point de* L *on fait correspondre un point de* L' *tel que l'on ait entre ces deux points* M *et* M' *la relation*

$$(PQRM) = (P'Q'R'M')$$

les points M *et* M' *sont deux points correspondants de deux divisions homographiques.*

En effet, soient $p\ q\ r\ x$, $p'\ q'\ r'\ x'$ les abcisses des points P Q R M P' Q' R' et M' ; la relation précédente s'écrira :

$$\frac{p-r}{q-r} : \frac{p-x}{q-x} = \frac{p'-r'}{q'-r'} : \frac{p'-x'}{q'-x'}$$

désignons par h le rapport constant $\frac{p'-r'}{q'-r'} : \frac{p-r}{q-r}$ on aura :

(4) $$\frac{p'-x'}{q'-x'} = h . \frac{p-x}{q-x}$$

et en chassant les dénominateurs, on obtient une relation de la forme (1)

Nous emploierons souvent des relations homographiques écrites sous la forme (4)

§ **70.** — Théorème. — *Deux divisions homographiques d'une troisième sont homographiques entre elles :*

1re Démonstration. — Soient deux points M et M′ ayant pour correspondant M″, x, x' x'' les abcisses de ces trois points.

M et M′ étant homographiques, on a une relation de la forme

$$Axx'' + Bx + Cx'' + D = 0$$

de même M′ M″ étant homographiques on a :

$$A'x'x'' + B'x' + C'x'' + D' = 0$$

éliminant x'' entre ces deux relations, on a la suivante :

$$(Bx + D)(A'x' + C') - (Ax + C)(B'x' + D') = 0$$

qui montre que les points M et M′ se correspondent homographiquement.

§ **71.** — *2me Démonstration.* — Pour écrire que les points M et M′ se correspondent homographiquement, nous écrirons (M) = (M′) en entendant par là que le rapport anharmonique de quatre positions de M est égal à celui des quatre positions correspondantes de M′. De ce que M et M″ se correspondent homographiquement, on conclut (M) = (M″) de même (M′) = (M″) d'où l'on conclut (M) = (M′) ce qui démontre la proposition énoncée.

§ **72.** — Faisceaux homographiques. — En joignant les points correspondants M et M′ de deux divisions homographiques à deux points

fixes S et S' on obtient deux faisceaux SM S'M', dits homographiques. Nous appellerons S(M) le rapport anharmonique de quatre rayons S(M).

On aura S(M) = (M) = (M') = S'(M') d'où S(M) = S'(M')

§ **73.** — *Différentes manières d'obtenir des divisions et des faisceaux homographiques.*

Si un rayon tourne autour d'un point S les points M et M' où ce rayon coupe deux droites D et D' forment deux divisions homographiques,

car (M) = S(M) = S(M') = (M')

Si on joint à deux points fixes S et S' un point variable M d'une droite, les rayons SM S'M forment deux faisceaux homographiques.

car S(M) = (M) = S'(M)

Si on fait tourner un angle autour de son sommet, les côtés de cet angle forment deux faisceaux homographiques.

En effet, l'angle M'SM étant constant, quand SM tourne d'un certain angle SM' tourne du même angle dans le même sens, donc quatre rayons SM' forment une figure qu'on peut superposer à celle formée par les quatre rayons SM en la faisant tourner d'un certain angle; donc S(M) = S(M').

§ **74.** — *L'homographie est complètement déterminée par 3 couples d'éléments correspondants (Points ou rayons).*

Car soient AA', BB', CC', ces trois couples, un élément M étant donné son correspondant M' est donné par la relation :

(ABCM) = (A'B'C'M')

Théorème : Si dans deux faisceaux il existe trois couples de rayons correspondants SA, S'A', SB, S'B', SC, S'C' tels que les angles de SA avec S'A', de SB avec S'B' de SC avec S'C' soient égaux entre eux, l'angle de SM avec S'M' est constant.

En effet, soit K la valeur de l'angle SA, S'A'. Considérons une droite

S'M', qui fait avec SM l'angle K, S'M'₁ et SM forment deux faisceaux homographiques, et SA, S'A' SB, S'B' SC, S'C' sont 3 couples de rayons correspondants. D'où il résulte que S'M'₁ coïncide avec S'M', ce qui démontre la proposition.

§ 75. — Théorème. — Si deux droites se coupant en A portent deux divisions homographiques tel que le point A considéré comme appartenant à la première droite ait pour homologue le point A sur la deuxième, la droite MM' joignant deux points correspondants passe par un point fixe.

Soient en effet B et B', C et C' deux couples de points correspondants ; on aura (ABCM) = (A'B'C'M').

Ces deux rapports anharmoniques égaux ayant un point commun A, BB' CC' et MM' concourent ; donc MM' passe par le point S où se coupent BB' et CC'.

§ 76. — Théorème. — Si deux points situés sur une droite A sont les sommets de deux faisceaux homographiques, et si au rayon A du 1er faisceau correspond le rayon A dans le second, les points où se coupent deux droites M et M' correspondantes sont sur une droite fixe.

Soient en effet B et B', C et C' deux couples de rayons correspondants ; on aura (ABCM) = (AB'C'M').

Ces deux rapports anharmoniques égaux ayant un rayon commun A, les points de rencontre de B et B', de C et C', de M et M' sont en ligne droite, donc le point de rencontre de M et M' décrit la droite L qui joint le point de rencontre de B et B' au point de rencontre de C et C'.

(On remarquera que nous avons fait deux démonstrations corrélatives).

§ 77. — *Application.* — Considérons deux droites OX et OY, prenons sur OX un segment OP égal à x sur OY un segment OQ $= y$ et menons PM parallèle à OY, QM parallèle à OX qui se coupent en M ; on sait que x et y se nomment les *coordonnées* du point M. Je dis que

s'il y a entre x *et* y *une relation du premier degré* $Ax + By + C = 0$ *le lieu du point* M *est une droite.* En effet, dans ce cas, les points P et Q forment deux divisions homographiques semblables ; P allant à l'infini sur OX, son correspondant Q va à l'infini sur OY ; il en résulte que PM et QM forment deux faisceaux homographiques, dont les sommets sont à l'infini, et que la droite de l'infini qui contient les sommets des deux faisceaux se correspond à elle-même, par conséquent le point M de rencontre de deux rayons correspondants PM, QM décrit une droite.

La réciproque est vraie; si M décrit une droite, il y a entre x et y. une relation du premier degré ; en effet, on a $(P) = (M)$; $(Q) = (M)$ donc $(P) = (Q)$, par conséquent les points P et Q forment deux divisions homographiques, mais si M est à l'infini, P et Q sont aussi à l'infini ; par suite les deux divisions sont semblables, et la relation entre x et y ne contient pas de terme en xy.

Elle est de la forme : $Ax + By + C = 0$.

§ **78**. — Faisceaux homographiques de plans. — Si l'on a deux droites D et Δ, et deux divisions homographiques sur deux autres droites, M et M' étant deux points correspondants de ces deux divisions, les plans passant l'un par D et M, l'autre par Δ et M' sont dits former deux faisceaux homographiques de plans. Alors le rapport anharmonique de quatre plans D M, est égal (§ 19) à celui des quatre plans correspondants ΔM'. Il est clair que deux faisceaux homographiques de plans sont coupés par un plan quelconque suivant deux faisceaux homographiques de droites.

§ **79**. — Divisions homographiques sur une même droite. points doubles. — Si deux divisions homographiques sont sur une même droite, nous conviendrons de prendre une seule origine pour les abcisses des points M et M'. Cherchons alors si les points M et M' peuvent coïncider ; faisons $x = x'$. dans la relation d'homographie ; nous obtenons une équation du second degré. $Ax^2 + (B + C)\,x + D = o$.

Si $(B + C)^2 - 4\,AD$ est positif, cette équation a deux racines ; il y

a donc deux points P et Q tels que chacun d'eux coïncide avec son correspondant ; si $(B+C)^2 - 4AD$ est nul, les deux racines de l'équation deviennent égales entre elles, les points P et Q viennent se confondre : Si $(B+C)^2 - 4AD$ est négatif, ils disparaissent ; on dit qu'ils sont imaginaires. Lorsque P et Q existent, le milieu de PQ a pour abcisse la demi-somme des racines de l'équation précédente $-\frac{B+C}{2A}$; *c'est aussi le milieu de la droite* I J' car les points I et J' ont respectivement pour abcisses $-\frac{B}{A}$ et $-\frac{C}{A}$.

On conviendra de continuer à appeler ce point le milieu de PQ quand P et Q sont imaginaires, de même, quand P et Q existent on a :

$$(PQ)^2 = (OQ - OP)^2 = (OQ + OP)^2 - 4 \times OP \times OQ = \left(\frac{B+C}{A}\right)^2 - 4\frac{D}{A} = \frac{(B+C)^2 - 4AD}{A^2}.$$

Si P et Q sont imaginaires $(B+C)^2 - 4AD$ est négatif, on convient encore de dire que l'expression $\frac{(B+C)^2 - 4AD}{A^2}$ est le carré de P Q.

Ce sont là de simples façons de parler. Nous avons déjà trouvé des façons de parler analogues pour les conjugués harmoniques (§ 35).

Si l'on joint à un point S les points correspondants M et M' de deux divisions homographiques on a deux *faisceaux homographiques* dont on obtient les rayons doubles en joignant les points S et S' aux points doubles de deux divisions.

§ **80**. — Nous allons démontrer ici quelques propriétés importantes des points doubles.

Lorsqu'on a deux divisions homographiques, un point M de la droite qui les porte toutes deux, étant considéré comme appartenant à la première division, a son homologue M' de la deuxième, mais on peut aussi considérer M comme appartenant à la deuxième division ; il a alors pour homologue un point M_1 de la première. Les deux divisions M' et M_1 sont homographiques ; *leurs points doubles sont les mêmes que ceux des deux divisions données.*

En effet, on a $(M_1) = (M)$; $(M) = (M')$ donc $(M_1) = (M')$ ce qui démontre la première partie du théorème.

De plus, pour que M_1 coïncide avec M il faut que M′ coïncide avec M, ce qui démontre la deuxième partie, car alors M coïncidera avec M′.

Cette deuxième partie subsiste encore quand il n'y a pas de points doubles, en ce sens que le milieu du segment des points doubles et le carré de leur distance sont les mêmes.

Pour le vérifier, il suffit de remarquer qu'on a x, x' et x_1 étant les abscisses des points M, M′ et M_1.

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0$$

$$Axx_1 + Bx_1 + Cx + D = 0$$

et l'équation qui donne les points doubles est

$$Ax^2 + (B + C)x + D = 0$$

pour avoir la relation entre x' et x_1 éliminons x entre les deux relations précédentes ; on a :

$$\frac{Cx' + D}{Ax' + B} = \frac{Bx_1 + D}{Ax_1 + C}$$

ou :

$$A(C - B)x'x_1 + (AD - B^2)x_1 + (C^2 - AD)x' + D(C - B) = 0$$

en faisant $x_1 = x'$ et divisant par $C - B$ qui n'est pas nul, car dans ce cas les points M_1 et M′ coïncideraient, on a :

$$Ax^2 + (B + C)x + D = 0$$

c'est la même équation du second degré que ci-dessus, ce qui suffit à démontrer la proposition énoncée.

§ **81**. — Supposons qu'on prenne pour origine un point quelconque a dont l'homologue dans la deuxième division sera désigné par a'.

Ecrivons la relation d'homographie sous la forme :

$$xx' + Bx + Cx' + D = 0$$

en supposant $A = 1$ ce qui est permis quand les points I et J ne sont pas à l'infini.

On sait que pour $x=\infty$ on a $x'=-B$ ainsi $B=-aJ'$ de même $C=-aI$. Maintenant pour $x=0$ ou trouve $x'=-\frac{D}{C}$ d'où $D=-C\times aa'=aI\times aa'$.

La relation peut donc s'écrire:

$$xx'-aJ'.x-aI.x'+aI.aa'=0$$

On pourrait de même l'écrire en appelant a_1 le point de la première division qui a pour homologue a dans la seconde.

$$xx'-aJ'\times x-aI\times x'+aJ'\times' aa'=0$$

Je vais démontrer que le conjugué harmonique de a par rapport à $a'a_1$ est le même que par rapport aux points doubles. Soit en effet α ce point. Il est caractérisé par la relation:

$$\frac{2}{a\alpha}=\frac{1}{aa'}+\frac{1}{aa_1}$$

D'autre part si e et f désignent les points doubles on a pour déterminer leurs abcisses, l'équation

$$x^2-(aI+aJ')x+aI\times aa'=0$$

ou

$$x^2-(aI+aJ')x+aJ'\times aa'=0$$

d'où

$$ae+af=aI+aJ'$$

$$ae.af=aI.aa'=aJ'.aa'$$

par suite

$$\frac{1}{ae}+\frac{1}{af}=\frac{1}{aa_1}+\frac{1}{aa'}$$

donc on a bien:

$$\frac{2}{a\alpha}=\frac{1}{ae}+\frac{1}{af}$$

ce qui démontre la proposition, mais si les points e et f n'existent pas, cette relation continue d'avoir un sens, puisque

$$\frac{ae.af}{ae+af}\text{ est }\frac{aI\times aa'}{aI+aJ'}$$

On dit que a et α sont conjugués par rapport aux points dou-

bles imaginaires. Il est facile de vérifier que si O est le milieu de IJ' et R^2 le carré (négatif) de la demi-distance de ces points on a :

$$O a \times O \alpha = R^2$$

§ **82**. — Propriétés de l'homographie dans le cas ou les points doubles sont imaginaires. — *Quand les points doubles de deux divisions homographiques sont imaginaires, il existe dans le plan de la figure, deux points* S *et* S' *symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite, tel que si* M *et* M' *sont deux points correspondants, l'angle* MSM' *et l'angle* MS'M', *soient constants et toujours de même sens.*

En effet, prenons le point O milieu des points IJ', puis en ce point élevons une perpendiculaire à la droite, et prenons sur cette perpendiculaire une longueur OS égale à la racine carrée du carré changé de signe de la demi-distance des points doubles ; c'est-à-dire que : les points doubles étant fournis par l'équation $x^2 + (B+C)x + D = 0$, et cette équation n'ayant pas de racines réelles, le carré de la demi-distance des points doubles est :

$$\frac{(B+C)^2 - 4D^2}{4} \text{ quantité qui est négative}$$

$$\text{on prend donc } OS = \frac{\sqrt{4D^2 - (B+C)^2}}{2}$$

On prendra de même OS' de l'autre côté de la droite, sur la même perpendiculaire S' et S seront symétriques par rapport à la droite.

Cela posé, je vais montrer que l'angle MSM' est constant ; on sait d'après une remarque faite, qu'il suffit de montrer que trois positions de cet angle sont des angles égaux de même sens (§ 74).

Menons par S une parallèle PSQ à la droite MM', S étant entre P et Q O étant le milieu de J'I, les angles J'SO et OSI sont égaux et de même sens ; il en est de même de leurs compléments PSJ' ISQ. Or SP est l'homologue de SJ', SI l'homologue de SQ. Cela fait déjà deux angles égaux.

Il reste à montrer qu'un troisième angle est égal à ces deux, et de même sens ; or soit O' l'homologue de O, O étant considéré comme appartenant à la première figure ; $OI \times OO'$ est le terme constant de l'équation du 2e degré qui donne les points doubles et qui (avec l'origine considérée) est $x^2 + OI \times OO' = 0$ donc on a en grandeur et signe $OI \times OO' = OS^2$, et puisque $OJ' = - OI$, ; $OJ' \times OO' = - OS^2$ donc SJ' est perpendiculaire à SO ; l'angle J'SO' étant droit ainsi que l'angle PSO (et de même sens) en enlevant J'SO on voit que les angles PSJ' et OSO' sont ègaux et de même sens ; ce qui démontre la proposition.

§ **83**. — Autre démonstration. — Nous avons vu que la relation d'homographie peut s'écrire (en prenant le point O comme origine) :

$$xx' - OJ'.x - OI.x' + OI.OO' = 0$$

or ici on a : $OJ' = - OI$ et $OI \times OO' = OS^2$

donc : $xx' - OI\,(x' - x) + OS^2 = 0$

or $\frac{x}{OS}$ c'est *tgte* OSM, $\frac{x}{OS}$ c'est *tg* OSM' en grandeur et signe.

on a donc, en divisant l'égalité précédente par OS^2

$$tg\ OSM \times tg\ OSM' - \frac{OI}{OS}\,(tg\ OSM' - tg\ OSM) + 1 = 0$$

d'où l'on tire

$$\frac{OS}{OI} = \frac{tg\ OSM' - tg\ OSM}{1 + tg\ OSM \times tg\ OSM'} = tg\,(OSM' - OSM) = tg\,MSM'$$

$\frac{OS}{OI}$ est la tangente de l'angle $OIS = V$, on a donc :

$tg\ MSM' = tg V$ d'où $MSM' = V$, ce qui démontre la proposition.

Remarquons que si autour de la droite portant les deux divisions, on fait tourner le plan de la figure, le point S décrit dans un plan perpendiculaire à la droite un cercle de centre O. Dans chacune de ses positions le point S possède la propriété énoncée.

§ **84**. — Propriété de deux faisceaux homographiques a rayons doubles imaginaires. — *Deux faisceaux homographiques, de même sommet, peuvent toujours être considérés comme la perspective de*

deux faisceaux homographiques engendrés par les deux côtés d'un angle constant, tournant autour de son sommet.

Coupons en effet les deux faisceaux PM, PM' par une droite quelconque D. Nous obtenons deux divisions M et M' à points doubles imaginaires; considérons l'un des points S du théorème précédent, amenons-le en Σ en faisant tourner le plan de la figure autour de la droite, l'angle MΣM' sera un angle constant tournant autour de Σ. En plaçant un centre de projection en un point quelconque de la droite PΣ, la droite PM sera toujours la perspective de ΣM, et PM, celle de ΣM', ce qui démontre la proposition.

On peut remarquer que SM et PM sont homologiques, puisque SM s'obtient en rabattant ΣM dans le plan de la figure (§ 54) ; ainsi dans l'énoncé précédent, on peut remplacer le mot *perspective* par *figure homologique*.

§ **85°**. — Constructions relatives a l'homographie. — Nous ferons d'abord remarquer que les questions relatives aux faisceaux peuvent, en coupant par une droite, se ramener à des questions relatives à des points. Il ne sera donc pas nécessaire d'indiquer chaque fois deux constructions corrélatives.

1er Problème. — Trois couples de points AA' BB' CC *étant donnés une homographie est définie, construire le point* M' *correspondant d'un point donné* (*Voir* § 31).

On doit avoir (ABCM) = (A'B'C'M'), il faut trouver le point M' satisfaisant à cette condition. Ce problème a été résolu à la fin du second chapitre. Nous rappelons ici la solution. Supposons que ABCM. et A'B'C'M' soient sur deux droites différentes, on joint AB' et A'B qui se coupent en β AC' et A'C qui se coupent en γ puis A'M qui coupe $\beta\gamma$ en δ, la droite Aδ coupera A'B' en M'. En effet, soit α le point où $\beta\gamma$ coupe AA' on aura :

$$A'B'C'M' = A(A'B'C'M') = \alpha\beta\gamma\delta = A'\,(\alpha\beta\gamma\delta) = A'(ABCM) = ABCM$$

Si les points étaient sur la même droite, on joindrait les points ABCM à un point S quelconque et l'on couperait le faisceau S (ABCM) par une droite en $A_1B_1C_1M_1$ on serait ramené au cas précédent.

Cette construction n'exige que l'emploi de la règle ; il y en a d'autres, mais elles exigent l'emploi du compas. On peut par exemple mener par A' une droite sur laquelle on prend $A'B_1 = AB$ $A'C_1 = AC$ $A'M_1 = AM$, on joint $B'B_1$ et $C'C_1$ qui se coupent en S ; on joint SM_1 qui coupe A'B' au point M'.

En effet on a :

$$A'B'C'M' = S(A'B'C'M') = S(A'B_1C_1M_1) = ABCM.$$

On voit que cette construction n'exige pas le tracé des cercles, mais le transport d'un segment sur une droite, ce qui se fait à l'aide du compas à pointes sèches ou d'une bande de papier. L'autre construction n'exige strictement que la règle; elle n'est d'ailleurs pas plus compliquée.

§ 86° — *Deuxième problème. — Les données étant les mêmes que ci-dessus, construire les points* I *et* J'.

On peut considérer ce problème comme un cas particulier du précédent. Supposons que ABC soient sur une droite, A'B'C' sur une autre, joignons A' au point B. au point C et au point à l'infini sur la droite AB ; ce qui se fait en menant par A' une parallèle à AB; AB' et A'B se coupent en β, AC' et A'C en γ, et la droite $\beta\gamma$ coupant la parallèle menée à AB par A' en δ, on joint $A\delta$ qui coupe A'B' au point J'. En effet on a : α étant le point où $\beta\gamma$ coupe AA' :
$(A'B'C'J') = A\ (A'B'C'J') = (\alpha\beta\gamma\delta) = A'\ (ABC\infty) = (ABC\ \infty)$ ce qui démontre la proposition.

Si les deux divisions étaient sur la même droite, on prendrait un point S, on joindrait SA SB SC et on mènerait $S\mu$ parallèle à la droite; on couperait par une droite quelconque qui donnerait quatre points A_1 B_1 C_1 M_1 on construirait le point J' tel que $(A_1\ B_1\ C_1\ M_1) = (A'\ B'\ C'\ J')$.

Ce problème exige l'emploi de la règle et celui de la fausse équerre pour tracer les parallèles.

§ **87.** — 3° *Problème. — Construire les points doubles.* — Nous allons donner différentes solutions de ce problème.

1° Supposons d'abord que l'on ait construit les points I et J'; soit O leur milieu O' le correspondant de O, les points doubles P et Q sont donnés par la relation :

$$OP^2 = -OI \times OO'$$

On n'a donc, pour les avoir, qu'à prendre une moyenne proportionnelle entre OI et OO', le problème ainsi résolu donne des points réels si O est entre I et O', sinon les points doubles sont imaginaires, mais la construction donne les points S et S', dont il a été question dans un théorème précédent (§ 82).

§ **88.** — 2° *On donne trois couples de points correspondants.*

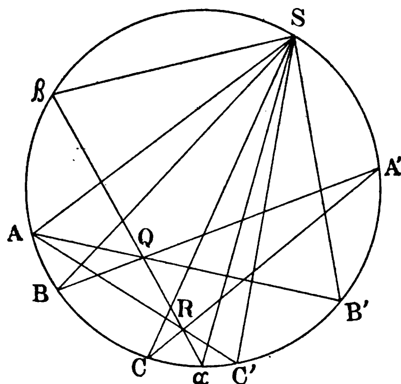
Je démontrerai d'abord le théorème suivant:

S *étant un point d'un cercle,* O *est le sommet commun de deux faisceaux homographiques;* SA *et* SA' *sont deux rayons correspondants fixes qui coupent le cercle en* A *et* A', SM *et* SM' *deux rayons mobiles coupant le cercle en* M *et* M'. *Dans ces conditions,* AM' *et* A'M *se coupent en un point* P *dont le lieu est une droite.*

En effet, les rayons SM et A'M sont homographiques, car si le point M se déplace sur le cercle, SM et A'M tournent du même angle égal à la moitié de l'angle dont a tourné le rayon OM, par suite, les angles de 4 rayons SM sont égaux aux angles des rayons correspondants A'M et de même sens; ainsi on a S (M) = A' (M) pour la même raison S (M') = A (M')
donc: A (M') = A' (M)
mais quand M vient en A', M' vient en A, donc dans les deux faisceaux A (M') et A' (M) la droite AA' se correspond à elle-même; donc le lieu du point P de rencontre de AM' et de A'M est une ligne droite (*ce qu'il fallait démontrer*).

Cela posé, si l'on a trois couples de rayons correspondants

SA SA', SB SB' SC, SC' les points B,B' et C,C' étant aussi sur le cercle, les points de rencontre Q et R de AB', A'B, et de AC



et A'C, sont deux points de la droite lieu du point P. On peut donc tracer cette droite; soient α et β les points où elle coupe le cercle ; si le point P vient en α, c'est que M et M' viennent en α. S α est donc un rayon double. Il en est de même de Sβ.

Si l'on veut les points doubles de deux divisions homographiques sur une même droite, on joindra les points correspondants donnés à un point S pris à volonté sur un cercle quelconque ; on sera ramené au problème précédent.

On voit que pour cette construction, il suffit *d'un seul cercle*, et que ce cercle peut être tracé d'une façon *absolument arbitraire.*

§ **89**. — Transformation des faisceaux et des divisions homographiques. — 1° Dans deux figures polaires réciproques, à quatre points en ligne droite correspondent quatre rayons passant par un même point et ayant même rapport anharmonique; on voit que si l'on a deux divisions homographiques, il leur correspondra dans la figure corrélative deux faisceaux homographiques.

2° Dans deux figures homologiques, les rapports anharmoniques des divisions ou des faisceaux se conservant dans la figure transformée, à des divisions ou faisceaux homographiques correspondent des divisions ou faisceaux homographiques.

SIXIÈME LEÇON

Involution

§ **90**. — Nous démontrerons d'abord la proposition suivante :

Si dans deux divisions homographiques à un point m *convenablement choisi, correspond un point* m' *qui soit le même, que l'on considère* m *comme appartenant à la première ou à la seconde division la même propriété subsiste pour tous les points.*

En effet soit :

$$Axx' + Bx' + Cx + D = o$$

la relation d'homographie, nous supposons qu'il existe une valeur de x et une de x' satisfaisant à cette relation et à la suivante :

$$Ax'x + Bx + Cx' + D = o$$

en retranchant cette égalité de la précédente on a :

$$(B - C)(x' - x) = o$$

or x' n'est pas égal à x sans quoi m serait un point double ; on a donc :

$$B = C$$

et la relation d'homographie s'écrit :

$$Axx' + B(x + x') + D = o$$

et cette relation ne changeant pas quand on permute x et x' le théorème est démontré.

Une telle homographie s'appelle une *involution*. La correspondance involutive possède les propriétés de la correspondance homographique, et d'autres propriétés que nous allons indiquer.

Les points I et J' coincident, le point à l'infini ayant même correspondant soit qu'il appartienne à la première division, soit qu'il

appartienne à la seconde, *le point* O *leur milieu, coincide donc avec chacun d'eux* et l'on a, M et M' désignant deux points correspondants quelconques : $OM \times OM' = h$ (O se nomme *point central*).

§ **91**. — Soient A B C trois points A' B' C' leurs correspondants ; on peut considérer A B C C' comme ayant pour correspondants A' B' C' C on a donc :

$$(ABCC') = (A'B'C'C)$$

$$\text{ou: } \frac{CA}{CB} : \frac{C'A}{C'B} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{CA'}{CB'}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\frac{CA \times CA'}{CB \times CB'} = \frac{C'A \times C'A'}{C'B \times C'B'}$$

Réciproquement une telle relation où C *et* C' *sont variables est une relation d'involution.* Si x x' a a' b b' sont les abcisses de CC' AA' BB' cette relation peut s'écrire $\frac{(x - a)(x - a')}{(x - b)(x - b')} = \frac{(x' - a)(x' - a')}{(x' - b)(x' - b')}$.
et en chassant les dénominateurs et divisant par $x' - x$, on obtient la relation voulue d'involution.

On voit que l'involution est définie par *deux* couples de points correspondants.

§ **92**. — *Si* A,A'; B,B' *sont deux couples de points correspondants de deux divisions homographiques,* E *et* F *les points doubles,* AB', BA' E *et* F *sont trois couples de points correspondants d'une même involution.*

En effet A B E F ayant respectivement pour correspondants homographiques, A' B' E F on a : (ABEF) = (A' B' E F)
ou d'après une propriété du rapport anharmonique : (ABEF = (B'A'FE)

$$\text{c'est à dire: } \frac{EA}{EB} : \frac{FA}{FB} = \frac{FB'}{FA'} : \frac{EB'}{EA'}$$

$$\text{ou encore : } \frac{EA \times EB'}{EB \times EA'} = \frac{FA \times FB'}{FB \times FA'}$$

et d'après le paragraphe précédent, cette relation est celle qu'il s'agissait d'établir.

§ **93**. — POINTS DOUBLES. — O *étant le point central*, M *et* M′ *deux points correspondants quelconques*. P *l'un des points doubles*, on aura :

$$OP^2 = OM \times OM'.$$

Pour que OP soit réel, il faut que M et M′ soient du même côté de O. La construction du point central, celle des points doubles sont simples. Par deux points correspondants AA′ faisons passer un cercle, et par deux autres BB′ un second cercle coupant le premier en P et Q. Si PQ coupe en O la droite portant l'involution, on aura dans le premier cercle $OP \times OQ = OA \times OA'$, et dans le second, $OP \times OQ = OB \times OB'$. On aura donc $OA \times OA' = OB \times OB'$, O est bien le *point central*. En outre si O n'est pas entre P et Q, menons de O une tangente au premier cercle, le touchant en T, on aura $OT^2 = OA \times OA'$. OT sera alors la distance du point O à chacun des deux points doubles que l'on peut ainsi construire. P et Q étant les points doubles, et O leur milieu, la relation.

$$OA \times OA' = OP^2$$

montre que *deux points correspondants quelconques* A *et* A *sont conjugués par rapport aux points doubles*.

Réciproquement si deux points variables A et A′ sont conjugués par rapport à deux points fixes P et Q, la relation $OA' \times OA = OP^2$ montre que *ces points forment une involution dont* P *et* Q *sont les points doubles*.

Couple de points commun à deux involutions

§ **94**. — Considérons deux involutions. Dans la première A et B ont pour correspondants respectifs A′ et B′ dans la seconde A″ et B″. Il s'agit de trouver un point M qui ait même correspondant M′ dans les deux involutions. Or, considérons les deux

divisions homographiques dans lesquelles A A′ A″ ont pour correspondants B B′ B″, d'après le § (92) les point M et M′ devront être les points doubles de ces deux divisions. On est donc ramené à un problème connu.

§ 95. — INVOLUTION AYANT LES MÊMES POINTS DOUBLES QU'UNE HOMOGRAPHIE. — Soient A et A′ deux points correspondants homographiques; A_1 le point de la première division dont l'homologue est A dans la seconde α le conjugué de A par rapport à a, et a. Nous voyons d'après le § (81) qne a et α forment une involution ayant mêmes points doubles que l'homographie. La recherche des points doubles de deux divisions homographiques peut donc se ramener à la recherche des points doubles d'une involution.

§ 96. — FAISCEAUX EN INVOLUTION. — Ce sont les faisceaux obtenus en joignant à un même point S les points correspondants, d'une involution. Aux points doubles de l'involution correspondent les rayons doubles du faisceau.

Il est clair qu'en coupant deux faisceaux en involution par une droite quelconque, on obtient deux divisions en involution.

THÉORÈME. — *Si un angle droit tourne autour de son sommet, ses deux côtés forment deux rayons en involution.*

En effet, ils forment deux faisceaux homographiques; et si au rayon SA correspond le rayon SB, il est clair qu'au rayon SB correspond le rayou SA.

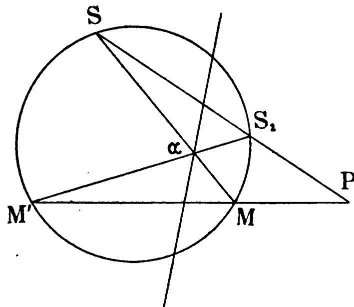
Autrement. — Coupons par une droite quelconque, et menons SO perpendiculaire sur cette droite. Deux côtés de l'angle déterminent sur cette droite deux points M et M′, et d'après une propriété du triangle rectangle, on a : $OM \times OM' = -OS^2$.

M et M′ forment alors sur la droite une involution dont O est le point central et dont les points doubles sont imaginaires.

§ **97**. — *Réciproquement*. — 1° Etant donnée sur une droite une involution dont les points doubles sont imaginaires, on peut trouver un point S tel que l'angle des droites obtenues en le joignant à deux points correspondants M et M' soit droit. — En effet, O étant le point central, on a k étant une certaine constante : $OM \times OM' = - k^2$. Prenons sur une perpendiculaire menée par O à la droite portant l'involution une longueur $OS = k$; l'angle MSM' sera droit d'après ce qui précède. — 2° Si les rayons doubles de deux faisceaux involutifs sont imaginaires, on peut toujours considérer deux rayons homologues comme les perspectives, ou les homologiques de deux rayons rectangulaires. Ceci se démontre comme au § 84.

§ **98**. — EXEMPLES DE DIVISIONS OU FAISCEAUX EN INVOLUTION. — THÉORÈME. — *Si par un point fixe* P *on mène une droie variable coupant un cercle C en* M M', *si l'on joint ces points à un point fixe* S *du cercle* C, SM, SM' *seront deux rayons en involution.*

Soit S_1 le second point où PS rencontre le cercle C. D'après le § 35 SM et S_1M' se rencontrent sur la polaire de P par rapport au cercle



en un point α. Alors (§ 34) le rapport anharmonique de quatre droites SM est égal à celui des quatre points α, ou des quatre droites S_1M'. On peut écrire : $S(M) = S_1(M')$.

D'autre part (§ 88) $S(M') = S_1(M')$.

Donc $S(M) = S(M')$. Les deux faisceaux S (M) S (M') sont donc ho-

mographiques, et comme l'échange de M en M' tranforme SM en SM' et inversement, ils sont en involution (*ce qu'il fallait démontrer*).

Réciproquement *si* S *est un point fixe d'un cercle* C, SM SM' *deux rayons correspondants d'une involution, coupant* C *en* M *et* M', *la droite* MM' *passe par un point fixe.*

En effet, soient AA' BB' deux positions de MM' concourant en P. Joignons PM qui coupe le cercle en M_1. L'involution SM, SM_1 et l'involution SM, SM' ayant deux couples de rayons correspondants communs SA SA' SB SB', coïncideront. SM_1 coïncidera avec SM' MM' passera donc par P (*ce qu'il fallait démontrer*).

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et démontrer le théorème corrélatif.

§ 99. — *Problème. — Inscrire dans un cercle un polygone dont les* n *côtés passent par* n *points donnés,* $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$.

La solution suivante se déduit de ce qui précède. Menons par A_1 une droite rencontrant le cercle en α_1 α_2, joignons A_2 α_2 qui rencontre le cercle en α_3, $A_3 \alpha_3$ qui coupe le cercle en α_4 ... etc... $A_n \alpha_n$ qui coupe le cercle en β. Si β coïncidait avec α_1, on aurait le polygone cherché : Mais d'après le théorème précédent on a, S étant un point quelconque du cercle

$$S(\alpha_1) = S(\alpha_2),\ \ S(\alpha_2) = S(\alpha_3) \ldots \text{ etc.} \ldots\ S(\alpha_n) = S(\beta)$$

donc $S(\alpha_1) = S(\beta)$.

Ainsi $S(\alpha_1)$ et $S(\beta)$ forment deux faisceaux homographiques. Nous savons en construire les rayons doubles : or, pour un rayon double $S(\alpha_1)$ α_1 coïncide avec β. Le problème proposé est alors résolu.

En transformant par polaires réciproques (ou bien à l'aide du théorème corrélatif) on résout le problème suivant.

Circonscrire à un cercle un polygone dont les n *sommets soient sur* n *droites fixes.*

SEPTIÈME LEÇON

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Théorie des projections. Coordonnées d'un point.

§ **100.** — On appelle *projection* d'un point A, sur une droite D, parallèlement à un plan P, le point a, ou un plan P′ parallèle à P mené par A, rencontre la droite D.

Supposons qu'on ait choisi sur la droite D une direction positive; cette droite est alors ce qu'on nomme un *axe*.

Considérons dans l'espace un segment AB, soient a la projection du point A, b celle du point B, le segment ab (avec son signe) se nommera la projection du segment AB.

Deux segments AB CD égaux parallèles et de même sens ont des projections égales en grandeur et en signe.

En effet, considérons la parallèle menée par A à l'axe de projection, elle rencontre le plan P″ qui projette B en un point β. De même la parallèle menée par C à l'axe de projection rencontre le plan P_1 qui projette D en un point δ. Désignons enfin par a b c d les projections respectives des points A B C D.

ab et $A\beta$ sont deux droites parallèles et de même sens, de plus les plans P′ et P″ qui projettent A et B étant parallèles, les droites Aa, βb, intersections de ces deux plans par un troisième sont parallèles; la figure $A\beta ba$ est donc un parallélogramme, et par suite $A\beta = ab$. On verra de même que $C\delta = cd$.

Mais les deux triangles $AB\beta$ $CD\delta$ ont tous leurs côtés parallèles. $B\beta$ et $D\delta$ sont en effet les intersections des plans parallèles P″ et P_1 par d'autres plans parallèles; de plus AB = CD. Ces triangles sont donc égaux, et par suite $A\beta = C\delta$ ou $ab = cd$.

D'ailleurs les signes sont évidemment les mêmes, parce que AB et CD ont même sens. Si en effet ab est *positif*, c'est que le plan projetant A est à *gauche* (par exemple) de B, mais alors le plan projetant C sera à *gauche* de D.

Les principes du chapitre premier donnent des théorèmes relatifs aux projections. Soient trois points A B C et $a\ b\ c$ leurs projections; on a : $ab + bc + ca = 0$ ce qui peut s'énoncer :

$$Proj.\ AB + proj.\ BC + proj.\ CA = 0$$

De même la proposition du § 3 donnera, si les points $a\ b\ c\ ...l$ sont les projections des points A B C ...L

$$ab + bc + cd + ... + kl + la = 0$$

c'est-à-dire

$Proj.\ AB + proj.\ BC + proj.\ CD + ...\ proj.\ KL + proj.\ LA = 0$

L'égalité précédente peut s'écrire : en remarquant que $Proj.\ LA = -\ Proj.\ AL$ (§ 1)

(1) $Proj.\ AL = proj.\ AB + proj.\ BC + proj.\ CD + ... + proj.\ KL$

c'est sous cette forme que nous l'appliquerons.

§ **101.** — Expression de la projection d'un segment. — Considérons un axe X'X sur lequel nous projetterons, et un second axe Y'Y, sur lequel se trouve un segment AB projeté sur X'X en $a\,b$, et un autre segment CD projeté sur X'X en $c\,d$. Je dis qu'on a en grandeur et signe :

$$\frac{AB}{ab} = \frac{CD}{cd}$$

L'égalité a lieu en grandeur en vertu de cette proposition de géométrie élémentaire : *Des plans parallèles interceptent sur deux droites des segments proportionnels.* Pour démontrer que les signes des deux membres sont les mêmes, supposons d'abord que le sens de AB soit *le même* que celui de CD. Alors pour amener le plan projetant A sur le plan projetant B, il faudra déplacer ce plan *dans le même sens* que pour amener le plan projetant C sur le plan projetant D. Mais le premier sens amène a sur b, le second, amène c sur d. Le sens ab sera donc le

même que le sens cd, alors dans l'égalité ci-dessus les numérateurs auront le même signe, et les dénominateurs auront aussi le même signe ; l'égalité sera donc vraie : si maintenant on change le sens de CD, celui de cd changera aussi, et le signe de $\frac{\text{CD}}{cd}$ ne sera pas altéré. La proposition est donc démontrée.

Supposons que CD soit égal à l'unité et dirigé dans le sens positif. On aura $\text{CD} = +1$. Soit λ la valeur de cd, on aura en grandeur et en signe $ab = \text{AB} \times \lambda$ c'est-à-dire

(²) $$\textit{Projection}\ \text{AB} = \text{AB} \times \lambda$$

le paramètre λ se nomme paramètre directeur de l'axe Y'Y. Si le plan P est perpendiculaire à X'X. (*projection orthogonale*) λ est par définition le cosinus de l'angle que font les deux directions Y'Y X'X. On voit facilement que cette définition est d'accord avec celle que l'on donne du cosinus dans les traités de trigonométrie.

§ **102**. — Coordonnées d'un point. — Considérons trois plans se coupant deux à deux suivant trois droites. Nous nommerons ces plans, *plans de coordonnées*. Leur point de rencontre O sera appelé l'origine. Sur chacune des droites nous choisissons une direction positive, soient Ox Oy Oz ces trois directions. Les droites se nomment les *axes de coordonnées*.

Soit P un point quelconque de l'espace ; projetons ce point en A sur Ox, parallèlement au plan yOz, en B sur Oy parallèlement au plan zOx, en C sur Oz parallèlement au plan xOy. Les trois segments OA OB OC que nous désignerons encore par x y z s'appellent *les coordonnées* du point P.

Réciproquement trois quantités positives ou négatives quelconques x y z sont toujours les coordonnées d'un certain point P et d'un seul. En effet, il existe sur l'axe Ox un seul point A tel que $\text{OA} = x$ en grandeur et en signe. Sur Oy un seul point B tel que $\text{OB} = y$ sur Oz un seul point C tel que $\text{OC} = z$.

Un plan P mené par A parallèlement au plan yOz sera évidemment le lieu des points dont la première coordonnée est égale à x. Un

plan Q mené par B parallèlement au plan zOx sera le lieu des points dont la seconde coordonnée est égale à y. Un plan R mené par C parallèment au plan xOy sera le lieu des points ayant z pour troisième coordonnée. Les plans P Q R se coupent en un point M, qui est évidemment le seul point dont les coordonnées soient $x\ y\ z$.

Considérons l'ensemble des points de l'espace, et un second ensemble dont chaque élément est un groupe de trois quantités $x\ y\ z$; à chaque élément du premier ensemble correspond par ce qui précède un élément du second et réciproquement. Aussi confondrons-nous souvent un point avec le groupe de ses trois coordonnées. Nous dirons le point (xyz) au lieu du point dont les coordonnées sont $x\ y\ z$.

§ **103**. — Changements d'axes de coordonnées. — Nous allons résoudre le problème suivant qui nous sera utile dans la suite. Les coordonnées d'un point par rapport à un système d'axe $o'x\ o'y'o'z'$ étant données, calculer les coordonnés du même point dans un second système d'axes $Ox\ Oy\ Oz$.

Le problème comporte deux cas particuliers que nous traiterons d'abord.

§ **104**. — 1° *On change l'origine sans changer la direction des axes.* — Soit M le point considéré O'X'Y'Z' le premier système d'axes, OXYZ le second système, xyz, $x'y'z'$ les coordonnées du point M dans ces deux systèmes.

On aura § 100), $\quad Proj\ OM = Proj\ OO' + Pr\ O'M.$

Soient abc les coordonnées de O' dans le système OXYZ; en projetant sur OX parallèlement au plan YOZ on aura $Proj\ OM = x$ $Proj\ OO' = a$.

La projection de O'M sur OX étant la même que sur O'X' qui est parallèle et de même sens, est égale à x'

(¹) ainsi $x = a + x'$; de même en projetant sur OY
$y = b + y'$ et en projetant sur QZ
$z = c + z'$

§ **105.** — 2° *On change la direction des axes mais non l'origine.*

Soit OX OY OZ un système d'axes, M un point dont les coordonnées sont xyz. Menons une droite Ox' par l'origine et prenons sur Ox' une longueur égale à 1, $O\omega$ dans le sens positif. Les coordonnées $\lambda\mu\nu$ du point ω se nommeront (§ 101) les trois paramètres directeurs de Ox'. Menons de même une droite OY', soient $\lambda'\mu'\nu'$ ses paramètres directeurs, et une droite OZ' dont les paramètres directeurs seront $\lambda''\mu''\nu''$.

Par M menons une parallèle à OZ' qui coupe en P le plan X'OY', par P menons PH parallèle à OY', qui coupe en H la droite OX'. Les coordonnées $x'y'z'$ de M dans le système OX'OY'OZ' seront : $OH = x'$ $HP = y'$ $PM = z'$ et l'on aura (§ 100)

$$Proj\, OH + Proj\, HP + Proj\, PM = Proj\, OM$$

Projetons sur OX parallèlement au plan YOZ. $Proj\, OM$ c'est x par définition. *Proj* OH c'est segment OH c'est-à-dire x' multiplié par λ (§ 101) ainsi $Proj\, OH = \lambda x'$, de même $Proj\, HP = \lambda' y'$ $Proj\, PM = \lambda'' z'$ on a donc

$$x = \lambda x' + \lambda' y' + \lambda'' z'$$

de même en projetant sur OY parallèlement au plan XOZ

$$y = \mu x' + \mu' y' + \mu'' z'$$

(1) et en projetant sur le plan XOY

$$z = \nu x' + \nu' y' + \nu'' z'$$

Ces trois formules résolvent la question.

§ **105.** — Le problème général est alors facile à résoudre. Considérons deux systèmes d'axes quelconques Ox, Oy, Oz, $O'x', O'y', O'z'$, soient $xyz, x'y'z'$ les coordonnées d'un point M dans ces deux systèmes. Prenons un troisième système d'axes $O'X_1 O'Y_1 O'Z_1$ dont O' est l'origine, mais qui sont parallèles à OX,OY,OZ.

Soient $x_1 y_1 z_1$ les coordonnées du point M dans ce nouveau système.

On aura pour passer du système OX OY OZ au système OX_1 OY_1 OZ_1 les formules;

$$x = a + x_1$$
$$y = b + y_1$$
$$z = c + z_1$$

et pour passer du système $x_1 y_1 z_1$ au système $x'y'z'$

$$x_1 = \lambda x' + \lambda' y' + \lambda'' z'$$
$$y_1 = \mu x' + \mu' y' + \mu'' z'$$
$$z_1 = \nu x' + \nu' y' + \nu'' z'$$

d'où il résulte:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} x &= a + \lambda x' + \lambda' y' + \lambda'' z' \\ y &= b + \mu x' + \mu' y' + \mu'' z' \\ z &= c + \nu x' + \nu' y' + \nu'' z' \end{aligned} \right.$$

et ces formules résolvent la question dans le cas général.

§ **106**. — Définition des surfaces algébriques. — Equation du plan. — Coordonnées d'un point divisant un segment dans un rapport donné. — Distance de deux points. — Angle de deux directions. — Une équation algébrique est une équation obtenue en égalant à zéro un polynome entier. Un polynome entier à trois variables $x y z$ est une somme de termes de la forme $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$ où A est un coefficient positif ou négatif, et $\alpha \beta \gamma$ trois entiers.

La somme $\alpha + \beta + \gamma$ se nomme le degré du terme, et le degré du polynome est celui de ses termes pour lesquels il est le plus élevé.

L'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à une équation algébrique de degré m, se nomme surface de degré m. Le degré m ou l'ordre de la surface ne dépend pas des axes choisis ; en effet si dans l'équation,

$$\Sigma\, Ax^\alpha y^\beta z^\gamma = 0$$

on remplace $x\ y\ z$ par leurs valeurs tirées des formules ([5]) on voit bien que l'équation en $x'\ y'\ z'$ que l'on obtient ne peut être de degré supérieur à l'ancienne. Elle n'est pas non plus de degré inférieur, car le degré s'éleverait par la transformation inverse.

S'il était question de géométrie plane, un point étant déterminé par deux coordonnées seulement x et y, on verrait qu'une courbe plane algébrique est définie par une équation algébrique à deux variables seulement x et y, et que le degré de l'équation ne dépend pas des axes de coordonnées.

§ **107.** — Revenons, pour plus de généralité, au cas de trois variables. Un plan étant défini par une équation $z = 0$ quand ce plan est pris pour plan des $x\ y$ et cette équation étant du premier degré, l'équation d'un plan restera du premier degré quels que soient les axes choisis. Nous verrons bientôt que, réciproquement, toute équation du premier degré représente un plan.

En géométrie plane une équation du premier degré représente une ligne droite. Nous avons déjà rencontré cette proposition (§ 77).

§ **108.** — Soient A et B deux points de coordonnées $x_0\, y_0\, z_0$ $x_1\, y_1\, z_1$ et M un point de la droite AB tel que $\frac{AM}{MB} = m$, $x\ y\ z$ ses coordonnées. Soient $a\ b$ et μ les projections faites sur O x parallèlement au plan Y O Z des points A B M. On aura (§ 103) $\frac{AM}{MB} = \frac{a\mu}{\mu b}$, mais $a\mu = x - x_0$ $\mu b = x_1 - x$ donc

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x} = m$$

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \text{d'où comme au § 6, } x = \dfrac{x_0 + mx_1}{1 + m} \\ \text{et de même } y = \dfrac{y_0 + my_1}{1 + m} \qquad z = \dfrac{z_0 + mz_1}{1 + m} \end{array} \right.$$

Ces formules sont fort utiles; quand m varie de $-\infty$ à $+\infty$ le point $(x\ y_1\ z)$ parcourt la droite AB.

§ **109**. — Nous pouvons maintenant démontrer que toute équation du premier degré représente un plan.

Considérons en effet une équation du premier degré.

$$(7) \qquad Ax + By + Cz + D = o$$

et soient deux points P (xyz) et Q $(x_1 y_1 z_1)$ dont les coordonnées satisfont à cette équation ; on aura

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

on aura donc, quel que soit m :

$$A(x_0 + mx_1) + B(y_0 + my_1) + C(z_0 + mz_1) + D(1 + m) = 0$$

ou bien $$A.\frac{x_0 + mx_1}{1+m} + B\frac{y_0 + my_1}{1+m} + C\frac{z_0 + m\,z_1}{1+m} + D = 0$$

ce qui montre que le point M ayant pour coordonnées.

$$x = \frac{x_0 + mx_1}{1+m} \quad y = \frac{y_0 + my_1}{1+m} \quad z = \frac{z_0 + mz_1}{1+m}$$

satisfait aussi à l'équation (7) ; or d'après le § 108, le point M est un point quelconque de la droite PQ, donc l'équation (7) représente un lieu tel qu'une droite Y ayant deux points Y soit contenue tout entière. C'est donc bien un plan.

§ **110**. — Nous allons encore appliquer les formules (6) à la résolution du problème suivant: on donne deux points A et B, de coordonnées $x_0 y_0 z_0 \quad x_1 y_1 z_1$, et un plan ayant pour équation.

$$ax + by + cz + d = 0$$

Ce plan coupe AB en un point M, calculer le rapport $\frac{AM}{MB}$.

En désignant ce rapport par m, les coordonnées du point M sont données par les formules (6). Le point M devant être dans le plan, on doit avoir : $$a\frac{x_0 + mx_1}{1+m} + b\frac{y_0 + my_1}{1+m} + c\frac{z_0 + mz_1}{1+m} + d = 0$$

Résolvons cette équation par rapport à m on a :

$$m = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}$$

et par conséquent $\frac{MA}{MB} = -m = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}$

On abrège en désignant par P le polynome $ax + by + cz + d$, par P_0 et P_1 les valeurs que prend P quand on y subtitue les coordonnées des points A et B

(*) alors $\frac{MA}{MB} = \frac{P_0}{P_1}$.

§ **111.** — Des points A et B abaissons des perpendiculaires sur le plan, soient H et K leurs pieds. On aura évidemment en grandeur et signe $\frac{AH}{BK} = \frac{AM}{BM} = \frac{P_0}{P_1}$, car AH et BR sont les projections de AM et BM sur un axe perpendiculaire au plan de P (§ 101).

On voit en outre que P_0 et P_1 sont de même signe ou de signes contraires selon que A et B sont du même côté du plan ou de côtés différents.

§ **112.** — Nous allons maintenant démontrer d'autres formules, très importantes pour la suite, *en supposant que les trois plans de coordonnées soient rectangulaires deux à deux.*

Dans cette hypothèse, considérons une droite passant par O, prenons dans le sens positif choisi sur cette droite une longueur OP = 1. Les coordonnées du point P que nous désignerons par $\lambda\ \mu\ \nu$ sont les paramètres directeurs de la direction OP; ici, comme les axes sont rectangulaires, $\lambda\ \mu\ \nu$ sont les cosinus des angles que la direction OP fait avec les axes.

Menons par P une parallèle à OZ rencontrant en K le plan XOY, par K une parallèle à OY, rencontrant OX en H.

Comme nous l'avons déjà vu OH HK KP sont les coordonnées du point P, $OH = \lambda$ $HK = \mu$ $KP = \nu$.

On aura : *Projection* OP = *Proj.* OH + *Proj.* HK + *Proj.* KP. (§ 100)

Projetons *orthogonalement* sur la direction OP; *Proj.* OP c'est OP luimême, c'est-à-dire l'unité. *Proj.* OH est égal à OH multiplié par le cosinus de l'angle de deux directions OX et OP, c'est-à-dire par λ, c'est

$\lambda \times \lambda$ ou λ^2, de même *Projection* HK $=$ HK $\times$ cos. $(o\lambda, oP) = \mu \times \mu = \mu^2$ enfin *projection* KP $= \nu^2$

(6) donc $1 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$

La somme des carrés des trois paramètres directeurs d'une direction dans un système d'axes rectangulaires est égale à l'unité.

Au lieu de projeter sur OP, projetons sur une autre direction OP' dont λ' μ' ν' sont les paramètres directeurs. Soit V l'angle POP'
On aura *projection* OP $=$ OP *cos.* V $=$ *cos.* V puisque OP $= 1$.
Projection OH $=$ OH $\times$ *cos.* (OP', OX) $=$ OH $\times \lambda' = \lambda\lambda'$, de même *projection* HK $=$ HK $\times$ *cos.* (OP',OY) $=$ HK $\times \mu' = \mu\mu'$, *projection* KP $=$ KP $\times$ *cos.* (OP', OZ) $= \nu\nu'$

(10) donc *cos.* $V = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'$

cette formule donne le cosinus de l'angle de deux directions, connaissant les paramètres directeurs.

§ **113**. — Soit maintenant sur OP un segment OM $=$ R : les projections de OM sur les axes seront les coordonnées de M, $(x\ y\ z)$, ce seront d'autre part $R\lambda$ $R\mu$ $R\nu$. On aura donc :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \lambda)$$

(11) et par suite (§ 112) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Cette équation donne la distance d'un point à l'origine, quand on connaît ses coordonnées.

Il est facile dès lors de trouver la distance de deux points quelconques. En effet soient A et B deux points, x_0 y_9 z_0, $x\ y\ z$ leurs coordonnées. Sans changer la direction des axes transportons l'origine au point A, et soient x' y' z' les coordonnées du point B. On aura (§ 104).

$$x = x_0 + x' \quad y = y_0 + y' \quad z = z_0 + z'$$

Mais on a, d'après ce qu'on vient de voir :

$$AB^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

(12) donc $AB^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$

c'est la formule cherchée.

§ **114.** — Déplacement dune figure. — Si nous avons une figure F et que nous la déplacions sans la déformer, nous obtenons une seconde figure F_1. Les coordonnées d'un point de la figure F_1 étant $x\ y\ z$ soient $x'y'\ z'$ les coordonnées du même point de la figure F, c'est-à-dire du point qui, après le déplacement, est devenu le point de coordonnées $x\ y\ z$. Considérons le trièdre trirectangle $O'x'y'z'$ qui après le déplacement, est devenu le trièdre $Ox\ Oy\ Oz$, on voit que le même point dont les coordonnées sont par rapport au trièdre $Ox\ Oy\ Oz$ $x\ y\ z$ a pour coordonnées par rapport au 2e trièdre $x'\ y'\ z'$. On a donc entre $x\,y\,z$ les formules du n° 105 formules (5) c'est-à-dire que ces formules peuvent être considérées à volonté comme liant les coordonnées d'un même point par rapport à deux systèmes d'axes différents, ou comme exprimant les coordonnées d'un point qui a subi un déplacement, connaissant ses coordonnées initiales.

HUITIÈME LEÇON

Sur les quantités complexes ou imaginaires, et les points imaginaires

§ **115**. — Une équation du second degré n'a pas toujours des racines, par exemple l'équation $(x - a)^2 + b^2 = o$ n'en possède pas. Pour l'uniformité et la facilité des raisonnements, il convient de définir de nouvelles espèces de quantités appelées *complexes* ou *imaginaires*. de telle sorte qu'en adoptant cette nouvelle notion, l'équation du second degré ait toujours des racines.

Nous appellerons quantité complexe, ou quantité imaginaire, l'ensemble de deux quantités ordinaires positives ou négatives $(a\ b)$ rangées dans un ordre déterminé. Nous désignerons souvent une telle quantité par une seule lettre.

§ **116**. — *Égalité*. — Deux quantités complexes $(a\ b)$, $(a'\ b')$ seront dites *égales* si l'on a séparément $a = a'$ $b = b'$. Il résulte de cette définition que l'égalité est réciproque, c'est-à-dire que si $A = B$, $B = A$, et que deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

§ **117**. *Addition*. — La *somme* de plusieurs quantités $(a\ b)$ $(a'\ b')$ $(a''\ b'')$ est par définition la quantité complexe $(a + a' + a''\ \ b + b' + b'')$ Soient $A\ A'\ A''$ les trois quantités complexes précédentes :
on aura $A + A' = A' + A$
car cela veut dire $a + a' = a' + a$, $\quad b + b' = b' + b$.
on aura aussi :

$$A + (A' + A'') = A + A' + A''$$

car cela veut dire : $a + (a' + a'') = a + a' + a''$

$$b + (b' + b'') = b + b' + b''$$

on aura $A + (0,0) = A$, ou pour abréger $A + 0 = A$
car cela veut dire $a + 0 = a$ $b + 0 = b$.

L'égalité $A + A' = A + A''$ entraînera $A' = A''$
car cela veut dire que les égalités $a + a' = a + a''$. $b + b' = b + b''$
entraînent $a' = a''$ $b' = b''$.

La *différence* $A - A'$ sera une quantité A'' telle que $A' + A''$ donne A c'est donc la quantité $(a - a'$ $b - b')$.

On voit qu'on obtient encore $A'' = A - A'$ en ajoutant à A la quantité $(-a', -b')$ c'est pourquoi nous appellerons cette quantité $-A'$; ainsi $-A' = -(a' b') = (-a', -b')$ par définition.

Comme toutes les règles relatives à l'addition et la soustraction sont des conséquences de ce que nous venons de démontrer, il en résulte que ces règles s'appliquent aux quantités complexes.

Remarque. — Si dans une quantite complexe, la seconde partie est nulle, nous l'omettrons. Nous écrirons a au lieu de $(a,0)$. Du reste nous avons déjà écrit ci-dessus 0 au lieu de (00).

§ **118.** — *Multiplication.* — Soient les deux quantités $A = (a, b)$
$A' = (a', b')$
on a par définition :

$$AA' = (aa' - bb', ab' + ba')$$

Cette définition semble bien arbitraire, mais nous verrons que les propriétés de cette opération sont des plus analogues à celles de la multiplication ordinaire.

On voit d'abord que si $b = 0$ $b = 0$ on a simplement $(aa', 0)$ ce qui redonne la multiplication ordinaire.

La multiplication est *commutative*, c'est-à-dire qu'on a :

$$AA' = A'A$$

En effet cette égalité équivaut aux deux suivantes :

$$aa' - bb' = a'a - b'b \quad ab' + ba' = a'b + ab'$$

La multiplication est *associative*, c'est-à-dire qu'on a :

$$(A\, A')\, A'' = A\, (A'\, A'')$$

En effet cette égalité équivaut aux deux suivantes :

(1) $$\begin{cases} [aa' - bb']\, a'' - [ab' + ba']\, b'' = a\,[a'a'' - b'b''] - b\,[b'a'' + a'b''] \\ [aa' - bb']\, b'' + [ab' + ba']\, a'' = b\,[a'a'' - b'b''] + a\,[b'a'' + a'b''] \end{cases}$$

ces égalités sont faciles à vérifier.

La multiplication est *distributive relativement à l'addition*, c'est-à-dire que :

$$(A' + A'') \times A = A'A + A''A$$

Cette égalité équivaut aux deux suivantes :

(2) $$\begin{cases} (a' + a'')\, a - (b' + b'')\, b = a'a - b'b + a''a - b''b \\ (a' + a'')\, b + (b' + b'')\, a = a'b + ab' + a''b + ab'' \end{cases}$$

ce qui se vérifie facilement.

On a $$A \times 1 = A \quad A \times 0 = 0$$

ceci est également facile à vérifier.

Réciproquement un produit ne peut être nul si aucun facteur n'est nul ; en effet on a l'identité :

(3) $$(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2 = (a^2 + b^2)\,(a'^2 + b'^2)$$

qu'il est facile de vérifier.

Si le produit AA' était nul, le premier membre de cette identité serait nul ; il en serait de même du second, ce qui est impossible si l'on n'a pas ou bien $a^2 + b^2 = 0$ ou bien $a'^2 + b'^2 = 0$, mais pour que l'on ait $a^2 + b^2 = 0$ par exemple, il faut évidemment que l'on ait $a = 0$ $b = 0$.

L'expression $\sqrt{a^2+b^2}$ s'appelle le module A. D'où l'on voit en extrayant les racines carrées des deux membres de l'identité (¹) que le module d'un produit est égal au produit des modules.

§ **119.** — On appelle quotient de A par A' la quantité Z telle quel $A = Z \times A'$;

Soit $A = (a, b)$ $A' = (a', b')$ $Z = (x, y)$
l'ègalité $A = ZA'$ équivaut à

$$a = a'x - b'y$$
$$b = b'x + a'y$$

Ces équations résolues donnent $x = \dfrac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}$ $y = \dfrac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}$

Les règles pour la multiplication et la division se déduisant toutes des propriétés que nous venons de démontrer s'appliquent aux quantités complexes.

§ **120.** — Manière d'écrire une quantité complexe. — On a $(ab) = (a0) + (0b)$
on a $(a0) = a$ par définition ; $(0b) = (01) \times (b0)$
désignons par i la quantité (01); la quantité $(b0)$ se désigne par b, comme on l'a vu ; on a donc :

$$(ab) = (a0) + (01)\ (b\,0) = a + ib.$$

Cherchons une quantité (xy) dont le carré soit -1 ; on a $(xy)^2 = (x^2 - y^2, 2xy)$ on doit donc avoir $x^2 - y^2 = -1$ $2xy = 0$. ce qui donne $x = 0$ $y^2 = 1$ ou $y = \pm 1$, les deux quantités cherchées sont donc (01) et $(0-1)$ c'est-à-dire i et $-i$. Ainsi i c'est $\sqrt{-1}$, mais nous continuerons à garder le symbole i.

§ **121.** — On voit que le calcul des quantités complexes revient à traiter i comme une quantité dont le carré est partout remplacé par -1.

Considérons maintenant l'équation du second degré

$$(x-a)^2+b^2=0$$

on en déduit $x-a=\pm ib$
d'où $x=a\pm ib$
en sorte que cette équation a pour racines deux quantités complexes.

Points, droites et plans imaginaires

§ **122.** — Nous considérons l'ensemble E des points de l'espace, et l'ensemble E_1 dont chaque élément est constitué par un groupe de trois valeurs positives ou négatives (xyz). Nous supposons que dans l'ensemble E on ne compte pas les points à l'infini, dont il sera question plus loin.

A chaque point P, élément de l'emsemble E, correspond, nous l'avons vu, un élément de l'ensemble E_1, le groupe de ses trois coordonnées (xyz).

On pourrait donc, au lieu d'étudier les éléments de l'ensemble E, c'est-à-dire les points de l'espace, étudier l'ensemble E_1 ; lorsque dans l'espace, plusieurs points P sont dans un même plan, les éléments correspondants de l'ensemble E_1 satisfont à une même équation du 1er degré. Lorsque plusieurs points de l'espace E sont sur une droite, les éléments correspondants de l'ensemble E_1 s'obtiennent en donnant à m des valeurs convenables dans un groupe de formules telles que les formules (6) du § 108.

Lorsque la distance PQ de deux éléments de l'ensemble E est égale à R, il y a entre les éléments correspondants de l'ensemble E_1 la relation

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \qquad (\S\ 113)$$

Si l'on fait subir à une figure F de l'espace E un déplacement les éléments correspondants $(x'y'z')$ de l'ensemble E_1 sont rem-

placés par d'autres xyz donnés par les formules ([5]) du § 105.

Comme la distance de deux points n'est pas altérée par un déplacement, on en conclut que les formules ([5]) du § 105, possèdent cette propriété : « Si on prend deux points $(x'y'z')$) $(x_0'y_0'z_0')$ et si on calcule par les formules ([12]) $x\ y\ z$ et de même $x_0\ y_0\ z_0$ en formant l'expression

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

on doit retrouver

$$(x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2$$

On suppose bien entendu qu'il s'agit d'axes de coordonnées *rectangulaires.*

§ **123.** — A chaque propriété de l'ensemble E correspond ainsi une propriété de l'ensemble E_1 qui en est en quelque sorte la traduction.

Adjoignons maintenant à l'ensemble E_1 un autre ensemble E_1' dont chaque élément est formé de trois quantités complexes (XYZ) l'ensemble E_2 formé des deux ensembles E_1 E_1' contient alors tous les groupes de trois quantités $(x\ y\ z)$, $x\ y\ z$ étant, soit des quantités ordinaires appelées aussi quantités simples ou réelles, soit des quantités complexes. Un élément de cet ensemble E_2 correspondra à un point, si $x\ y\ z$ sont réelles; dans le cas contraire, on convient d'appeler l'élément de l'ensemble E_2 *point imaginaire.*

Un point imaginaire sera dit situé sur une surface si ses coordonnées, c'est-à-dire les trois nombres qui le constituent, satisfont à l'équation de la surface.

§ **124.** — Considérons un point imaginaire $x = \alpha + \beta i$ $y = \alpha' + \beta' i$ $z = \alpha'' + \beta'' i$ le point $x = \alpha - \beta i$ $y = \alpha' - \beta' i$ $z = \alpha'' - \beta'' i$ sera dit conjugué du premier :
une équation algébrique

$$\Sigma\, A\, x^m y^n z^p = 0$$

où les coefficients A sont réels, ne peut être satisfaite par les coordonnées d'un point sans l'être en même temps par celles de son conjugué; en effet si on remplace $x\ y\ z$ par les coordonnées du premier point

le premier membre de l'équation prend une certaine forme $P + Q i$, tandis que pour les coordonnées du second il prend la forme $P - Q i$. Mais si la première équation est satisfaite on a $P + Q i = 0$ donc $P = 0 \quad Q = 0$ et par suite $P - Qi = 0$. Ceci ne serait pas vrai si les coefficients A étaient des quantités complexes, car en remplaçant xyz par les coordonnées du second point, on ne changerait pas i en $-i$ dans ces coefficients.

§ **125**. — La distance de deux points imaginaires $(x\, y\, z)$ $(x_0\, y_0\, z_0)$ est par définition la quantité R définie par l'équation.

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

(on voit que pour calculer R on a à extraire la racine carrée d'une imaginaire. La chose est facile: soit $x + iy = \sqrt{a + ib}$: on a en élevant au carré $x^2 - y^2 + 2\, ixy = a + ib$, et on a à résoudre les deux équations : $x^2 - y^2 = a \quad xy = \frac{b}{2}$ qui fournissent x et y)

Les formules de transformation du § 105, transforment, comme on l'a vu, l'expression de R^2 dans l'expression analogue en $x'\, y'\, z'\;\; x'_0\, y'_0\, z'_0$, de sorte que ces sortes de transformations effectuées sur les coordonnées des différents points d'une figure imaginaire ne changent pas leurs distances mutuelles. Quand on effectue cette transformation, on dit qu'on déplace la figure.

§ **126**. — On appellera *plan imaginaire* dans l'espace à 3 dimensions, *droite imaginaire dans le plan*, l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à une équation du premier degré à coefficients imaginaires.

Théorème. — Un plan imaginaire contient une droite réelle.

En effet le plan.

$$(a + a'i)\, x + (b + b'i)\, y + (c + c'i)\, z + d + d'i = 0$$

passe évidemment par la droite d'intersection des deux plans

$$ax + by + cz + d = 0 \quad a'x + b'y + c'z + d = 0$$

On peut remarquer que le plan imaginaire conjugué :

$$(a - a'i)\,x + (b - b'i)\,y + (c - c'i)\,z + d - d'i = 0$$

passe par cette même droite.

En géométrie plane, on verra de même qu'une droite imaginaire contient un point réel et un seul.

Théorème. — La droite qui joint deux points imaginaires conjugués est réelle. En effet les coordonnées de l'un de ses points sont

$$x = \frac{\alpha + \beta i + m\,(\alpha - \beta i)}{1 + m} \text{ et 2 autres formules analogues ;}$$

en posant $\frac{i\,(1 - m)}{1 + m} = \lambda$, on a $x = \alpha + \lambda\beta$ et de même $y = \alpha' + \lambda\beta'$

$z = \alpha'' + \lambda\beta''$ et quand λ varie on a des points réels.

On verra facilement que le plan qui contient trois points imaginaires et la droite qui contient les trois points conjugués des premiers sont imaginaires conjugués. Même remarque pour des droites joignant deux points imaginaires.

Droites isotropes, plans isotropes

§ **127**. — L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ est évidemment celle d'une sphère de rayon R ayant pour centre l'origine ; si R^2 est négatif, la sphère est imaginaire ; si $R^2 = 0$ cette sphère est un cône, car si on augmente $x\,y\,z$ dans un certain rapport λ, on a encore l'équation.

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2 = 0$$

or, quand on a deux points $x\,y\,z$ $x'\,y'\,z'$ tels que

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \lambda$$

il est bien facile de voir que ces points sont en ligne droite avec l'origine.

Les génératrices de ce cône sont des droites *isotropes*, ses plans tangents des plans *isotropes*. Nous reviendrons plus loin sur ces importantes notions.

Raisonnements sur des points imaginaires

§ 128. — Il est clair que si des principes subsistent pour les points imaginaires, leurs conséquences subsistent également.

Les théorèmes établis au § 1 subsistent évidemment pour les points imaginaires.

On a AB + BC + CA = 0 car si $\alpha\beta\gamma$ sont les abcisses des trois points, AB c'est par définition $\beta - \alpha$. L'égalité se réduit donc à

$$\beta - \alpha + \gamma - \beta + \alpha - \gamma = 0$$

c'est-à-dire à une identité.

§ 129. — La projectivité du rapport anharmonique est plus difficile à démontrer. Voici une démonstration qui, s'appliquant aux points réels, subsiste lorsqu'ils deviennent imaginaires.

Je ferai la démonstration pour le rapport anharmonique de quatre plans dans l'espace. Elle s'appliquera d'elle-même à quatre droites dans un plan, en supprimant la variable z.

Soit $Ax + By + Cz + D = o$ ou pour abréger $P = o$
l'équation d'un plan

$$A'x + B'y + C'z + D' = o \text{ ou } Q = o$$

celle d'un second plan.

Soient M et N deux points MN coupe P en un point R et Q en un point S. Soient $x_0 y_0 z_0$ $x_1 y_1 z_1$ les coordonnées des points M et N, on aura (§ 110) (formule 8).

$$\frac{RM}{RN} = \frac{P_0}{P_1} \text{ et de même } \frac{SM}{SN} = \frac{Q_0}{Q_1}$$

d'où :

$$\frac{RM}{RN} : \frac{SM}{SN} = \frac{P_0}{P_1} : \frac{Q_0}{Q_1}$$

considérons maintenant un plan $P + \lambda Q = 0$ passant par la droite

d'intersection des deux plans donnés et par le point M, $P + \mu Q = 0$ un second plan passant cette fois par le point N.

Le premier plan passant par M, on a : $P_0 + \lambda Q_0 = 0$ $\lambda = -\frac{P_0}{Q_0}$ de même le second passant par N, on a : $P_1 + \mu Q_1 = 0$ d'où $\mu = -\frac{P_1}{Q_1}$;

$$\text{par conséquent } \frac{\lambda}{\mu} = \frac{P_0}{Q_0} : \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_0}{P_1} : \frac{Q_0}{Q_1}$$

donc : le rapport anharmonique des quatre points (MNRS) où une droite rencontre quatre plans passant par une même droite : $P = 0$ $Q = 0$ $P + \lambda Q = 0$ $P + \mu Q = 0$ est égal à $\frac{\lambda}{\mu}$ il est donc le même, quelle que soit la sécante.

Ce principe une fois démontré, toutes ses conséquences en découlent facilement sans supposer les points réels.

§ **130**. — Nous allons aussi reprendre les propriétés du plan polaire par rapport à une sphère (ou de la polaire dans un plan par rapport à un cercle) afin de donner de ces propriétés des démonstrations applicables immédiatement, et sans modification au cas où les points sont imaginaires. Nous raisonnons, pour plus de généralité dans le cas de la sphère; le cas du cercle dans le plan se traitera de même en supprimant simplement la troisième variable z. L'équation d'une sphère ayant son centre à l'origine est :

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Soient A et B deux points, x_0 y_0 z_0, x_1 y_1 z_1 leurs coordonnées : M et M' les points où la droite AB coupe la sphère. Posons $\frac{AM}{MB} = m$, $\frac{AM'}{M'B} = m'$; les coordonnées du point M par exemple s'exprimeront par les formules (6), du § 108 et en écrivant que ce point est sur la sphère, on aura l'équation

$$\left(\frac{x_0 + mx_1}{1 + m}\right)^2 + \left(\frac{y_0 + my_1}{1 + m}\right)^2 + \left(\frac{z_0 + mz_1}{1 + m}\right)^2 = R^2$$

ou bien :

$$(^2)\ (x_0 + mx_1)^2 + (y_0 + my_1)^2 + (z_0 + mz_1)^2 - R^2(1 + m)^2 = 0$$

Les deux racines de cette équation en m seront m et m'. Pour que les points M et M′ soient conjugués par rapport à A et B, il faut que la somme des racines de cette équation soit nulle, et par suite que le coëfficient de m soit égal à zéro. On aura donc :

$$(^3)\qquad x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = R^2$$

c'est la condition pour que les points A et B soient conjugués par rapport à M et M′. Si A est fixe, le lieu de B est un plan qui a pour équation :

$$(_4)\qquad x_0x + y_0y + z_0z = R^2$$

Si le plan polaire de A *passe par* B, *celui de* B *passe par* A, car chacune de ces deux conditions s'exprime par la relation (^{3}).

Considérons un point variable C sur la droite AB, ses coordonnées seront, d'après les formules, de la forme

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda},\ y = \frac{y^0 + \lambda y_1}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1 + \lambda}$$

En formant l'équation de son plan polaire, on voit que si l'on désigne pour abréger par $P = 0$ $Q = 0$, les équations des plans polaires de A et B, le plan polaire de C aura pour équation $P + \lambda Q = 0$, en sorte qu'il passe par une droite fixe, intersection des plans $P = 0$ $Q = 0$, c'est la droite conjuguée de AB.

Prenons sur AB un autre point D qui s'obtient en attribuant à λ une autre valeur μ dans les formules précédentes ; on aura

$$\frac{AC}{CB} = \lambda\ ;\ \frac{AD}{DB} = \mu$$

le rapport anharmonique (A B C D) sera égal à $\frac{\lambda}{\mu}$

Les plans polaires de A B C D ayant pour épuations $P = 0$ $Q = 0$ $P + \lambda Q = 0$ $P + \mu Q = 0$ leur rapport anharmonique sera aussi $\frac{\lambda}{\mu}$. (§ 129), donc le *rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est bien égal à celui de leurs quatre plans polaires.*

NEUVIÈME LEÇON

POINTS A L'INFINI, COORDONNÉES HOMOGÈNES. FORMULES POUR LA TRANSFORMATION HOMOLOGIQUE DÉFINITION DES POINTS IMAGINAIRES DE VON STAUDT.

§ **131.** — Nous avons défini dans la leçon précédente, un ensemble E_2 dont chaque élément est un système de trois quantités (X Y Z) réelles ou complexes. On peut présenter les choses d'une façon un peu différente. Mettons X Y Z sous forme de rapports $X = \frac{x}{t}$ $Y = \frac{y}{t}$ $Z = \frac{z}{t}$ t sera forcément différent de zéro. On pourra, au lieu de donner X Y Z, donner les quatre valeurs $x\ y\ z\ t$, ($t \gtrless 0$) mais X Y Z ne changeront pas quand on multipliera $x\ y\ z\ t$ par une même quantité. L'ensemble E_2 aura alors pour éléments des systèmes de quatre valeurs réelles ou complexes, dont la dernière sera différente de zéro, *deux systèmes n'étant pas supposés distincts quand les quatre valeurs de l'un sont proportionnelles aux quatre valeurs du même rang de l'autre.* On dira, pour abréger, qu'un élément de l'ensemble E_2 est constitué par des quantités *proportionnelles* à quatre valeurs ($x y z t$) réelles ou complexes dont la dernière n'est pas nulle.

Nous avons déjà remarqué que deux points (XYZ), ($X_1Y_1Z_1$) tels que $\frac{X}{X_1} = \frac{Y}{Y_1} = \frac{Z}{Z_1}$ étaient en ligne droite avec l'origine. Il en résulte que si dans les formules $X = \frac{x}{t}$ $Y = \frac{y}{t}$ $Z = \frac{z}{t}$. On fait varier t sans modifier $x\ y\ z$, le point (XYZ) s'éloigne à l'infini dans une direction déterminée lorsqu'on fait tendre t vers zéro, et l'on peut dire que le point va

coïncider avec un certain point à l'infini. Nous convenons de dire que les coordonnées de ce point sont proportionnelles à x y z et zéro.

Considérons dès lors un autre ensemble E_3 dont chaque élément est constitué par des quantités proportionnelles à quatre valeurs (x y z t) réelles ou complexes dont la dernière peut être nulle. On appellera point un élément de cet ensemble. Si x y z t sont réelles, on aura un point de coordonnées $\frac{x}{t}$ $\frac{y}{t}$ $\frac{z}{t}$ dans l'espace réel ; si $t = 0$ on aura un point à l'infini dans la direction qui joint l'origine au point de coordonnées x y z. Si $\frac{x}{t}$ $\frac{y}{t}$ $\frac{z}{t}$ sont imaginaires, on aura un point imaginaire, qui peut d'ailleurs être à l'infini, si x y et z étant imaginaires, t est nul.

Nous pourrons appeler l'ensemble E_3 *l'espace analytique.*

Si on a l'équation d'une surface, de degré m.

$$\Sigma A X^{\alpha} Y^{\beta} Z^{\gamma} = 0$$

en remplaçant les coordonnées X Y Z par $\frac{x}{t}$ $\frac{y}{t}$ $\frac{z}{t}$ tous les termes contiendront en dominateur une certaine puissance de t ; la plus élevée sera t^m. Si donc on chasse les dominateurs en multipliant toute l'équation par t^m, on aura :

$$\Sigma A x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} t^{m - \alpha - \beta - \gamma} = 0$$

après cette opération, tous les termes sont de même degré en x y z t. On dit que l'équation est *homogène* ; d'où le nom de *coordonnées homogènes* donné à x y z t.

Les points à l'infini sont ceux pour lesquels $t = 0$. On dit que cette équation, qui est du premier degré, représente *le plan de l'infini.*

Considérons une sphère de centre x_0 y_0 z_0. On obtient son équation en écrivant que la distance du point (XYZ) au point x_0 y_0 z_0 est égale au rayon R, ce qui donne (§ 113)

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 = R^2$$

ou en coordonnées homogènes

$$(x - t x_0)^2 + (y - t y_0)^2 + (z - t z_0)^2 = R^2 t^2$$

En faisant $t = 0$ on a les points à l'infini sur la sphère.
Ces points sont donc à l'intersection du plan de l'infini avec la surface

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Cette équation ne contenant ni x_0, ni y_0, ni z_0, ni R, est la même pour toutes les sphères. Donc *toutes les sphères coupent le plan de l'infini suivant la même ligne.* Nous retrouvons ce résultat d'une manière géométrique ; cette ligne s'appelle le *cercle de l'infini.*

§ **132.** — Je vais compléter ici la théorie de l'homologie en donnant des formules qui permettent de calculer les coordonnées du point correspondant d'un point donné, dans une homologie.

Nous prendrons pour origine le centre O d'homologie ; pour axe des x une droite quelconque rencontrant en A le plan d'homologie, pour axes des y et des z deux droites parallèles au plan d'homologie.

Soient XYZ les coordonnées d'un point P, X'Y'Z' celles de son correspondant P'.

P et P' étant en ligne droite avec O, on aura :

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}$$

maintenant α étant le point ou OP rencontre le plan d'homologie

on a
$$\frac{OP'}{OP} : \frac{\alpha P'}{\alpha P} = K$$

K étant la constante d'homologie.

Le rapport anharmonique des quatre points $O\alpha P'P$ est égal à celui de leurs quatre projections sur Ox faites parallèlement au plan d'homologie ; donc, O A p' et p étant ces projections on a :

$$\frac{Op'}{Op} : \frac{Ap'}{Ap} = K$$

ou bien en posant $OA = a$

$$\frac{X'}{X} : \frac{X' - a}{X - a} = K$$

d'où par conséquent

$$\frac{X-a}{X}=\frac{K(X'-a)}{X'}$$

d'où l'on tire:

$$X=\frac{aX'}{aK+(1-K)X'} \quad Y=\frac{aY'}{aK+(1-K)X'} \quad Z=\frac{aZ'}{aK+(1-K)X'}$$

ou en coordonnées homogènes, ρ étant un facteur de proportionnalité arbitraire:

$$\rho x=ax' \quad \rho y=ay' \quad \rho z=az' \quad \rho t=aKt'+(1-K)x'$$

On voit que ces formules, qui sont du 1er degré, changeront une équation de degré m en une autre de degré m; c'est-à-dire qu'une ligne ou surface est du même ordre que son homologique.

§ **133**. — Voici une remarque résultant de ce qui précède et dont nous aurons besoin plus tard.

Une sphère réelle a une équation de la forme:

$$(x-x_0 t)^2+(y-y_0 t)^2+(z-z_0 t)^2-R^2 t^2=0$$

On voit que la figure homologique d'une sphère a une équation de la forme :

$$P^2+Q^2+R^2-S^2=0$$

PQRS étant quatre polynomes du 1er degré. Si l'homologie est réelle, c'est-à-dire si le centre, le plan d'homologie et la constante d'homologie sont réelles, PQRS seront des polynomes à coefficients réels; on voit que trois d'entre les quatre carrés ont un certain signe, le quatrième un signe contraire.

On verra sans peine que la figure homologique d'une sphère imaginaire a une équation de la forme

$$P^2+Q^2+R^2+S^2=0$$

les quatre carrés étant cette fois de même signe.

Considérons une équation de la forme:

$$P^2-Q^2+R^2-S^2=0$$

on pourra l'écrire

$$(P+Q)(P-Q)=(R+S)(S-R)$$

on voit que la surface qu'elle représente contient la droite réelle

$$P+Q=0 \quad R+S=0$$

et comme une sphère ne contient pas de droites réelles, cette surface ne saurait être la figure homologique d'une sphère dans une homologie réelle.

Ces remarques auront leur utilité dans la dernière leçon.

§ **134.** — Je terminerai cette leçon par quelques mots sur une manière d'envisager les points imaginaires, due à von Staudt. Dans ce qui précède nous n'avons pas considéré un point imaginaire comme un être existant dans l'espace ; c'était simplement un groupe de trois quantités.

Considérons une droite X'X, sur cette droite une origine et un sens positif.

Soit une équation du second degré à racines imaginaires

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$$

à cette équation correspond sur la droite une involution définie par la relation suivante entre les abcisses x et x' de deux points

$$xx' - a(x + x') + a^2 + b^2 = 0$$

et les racines de l'équation du second degré donnent les abcisses des points doubles (imaginaires) de cette involution. Ces points sont deux points imaginaires conjugués sur la droite $x'x$.

On pourrait donc donner de deux points imaginaires conjugués la définition suivante :

Donner deux points imaginaires conjugués c'est par définition donner une droite, et sur cette droite une involution n'ayant pas de points doubles réels.

Cette définition est très satisfaisante pour définir un couple de points imaginaires. C'est celle qu'admet Chasles, ou du moins celle de Chasles en diffère peu. Pour ce géomètre, donner deux

points imaginaires sur une droite, c'est donner une équation du second degré, n'ayant pas ses racines réelles.

Toute la difficulté est de définir un point imaginaire isolément, de le séparer de son conjugué.

§ **135.** — Faisons auparavant quelques remarques relatives à la définition d'un sens sur une droite.

Au point de vue projectif, nous ne pouvons pas définir un *sens* sur une droite en donnant sur cette droite deux points A et B et en disant que le sens choisi est celui qui va de A vers B. En effet, si les points A et B ont pour projection A′ et B′, mais si un point M compris entre A et B a sa projection M′ à l'infini, quand un point P ira de A vers B, il passera par M, et par suite la projection P ira de A′ en B′ après avoir passé par l'infini, c'est-à-dire que cette projection ne parcourra pas A′ B′.

Pour définir un sens sur une droite, il faudra se donner trois points ABC, et dire le sens qui va de A en B en passant par C, sans se préoccuper de cette circonstance que pour aller de A vers B en passant par C il faut peut-être passer par l'infini.

Un sens étant ainsi défini, si l'on projette les points ABC, en A′B′C′ au sens allant de A vers B en passant par C, correspondra le sens allant de A′ en B′ en passant par C′.

§ **136.** — Voici maintenant la définition d'un point imaginaire d'après Staudt. Donner un point imaginaire, c'est donner une droite, et sur cette droite une involution sans points doubles réels et un sens. Aux deux sens différents qu'on peut se donner correspondent alors deux points imaginaires conjugués. Ce qui fait l'intérêt de cette définition, c'est qu'elle n'emploie que des propriétés projectives, puisqu'en projetant une droite (coniquement) on a une droite, qu'en projetant une involution on a une involution, et qu'à un certain sens déterminé correspond comme nous venons de le voir, un sens déterminé.

§ **137.** — On peut faire la remarque suivante. Soit $x = a + bi$ une abcisse imaginaire. Remplaçons cette formule par les suivantes

$$x = a + bt \quad x' = a - \frac{b}{t}.$$

on déduit de là

$$(x - a)(x' - a) + b^2 = 0$$

Les deux points M et M', d'abcisses x et x forment donc une involution. Il est facile de voir que quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$ ces points se déplacent dans le même sens. On pourra dire que cette involution et ce sens définissent le point d'abcisse $a + bi$.

Le point d'abcisse $a - bi$ sera défini à l'aide des formules

$$x = a - bt \; x' = a + \frac{b}{t}.$$

Ces formules définissent la méme involution que les deux précédentes, mais le sens n'est pas le même.

§ **138.** — Une droite imaginaire (dans un plan réel) sera dèfinie de même par deux faisceaux en involution. avec des rayons doubles imaginaires et un sens de rotation. Cette involution découpe sur une droite réelle une involution de points, et le sens de rotation donne un sens sur cette droite réelle. On définit ainsi le point imaginaire d'intersection de deux droites, l'une imaginaire, l'autre réelle.

Dans l'espace, on définira un plan imaginaire par un faisceau de plans en involution (à plans doubles imaginaires) et un sens. Une droite imaginaire sera l'ensemble des points communs à deux plans imaginaires.

Cette théorie de Staudt n'est pas nécessaire au point de vue de la rigueur. La définition analytique que nous avons donnée du point imaginaire est suffisante. Mais elle fournit une représentation géométrique du point imaginaire propre à satisfaire l'esprit de ceux qui aiment les choses concrètes.

Si on a une involution sur une droite D, et qu'on projette sur les

axes de coordonnées en A,A' B,B' C,C', les points correspondants M,M', de cette involution on définira sur les axes trois points imaginaires qui seront les projections du point défini sur la droite D. Les abcisses de ces points seront les coordonnées du point défini sur la droite D.

DIXIÈME LEÇON

PROPRIÉTÉS DES CERCLES ET DES SPHÈRES

Figures inverses

§ **139.** — Nous allons démontrer rapidement ici les principales propriétés de l'*inversion*. Soit O un point dit *pôle* d'inversion, K une constante appelée constante d'inversion. Deux figures F et F′ seront dites *inverses* l'une de l'autre, si à chaque point M de la première, correspondant un point M′ de la seconde, situé sur OM et tel que $OM \times OM' = K$.

Il résulte de cette définition, que deux couples de points correspondants MM′, PP′ sont sur un même cercle, car on a : $OM \times OM' = OP \times OP' = K$.

§ **140.** — *Conservation des angles.* — On nomme angle de deux lignes qui se coupent, l'angle de leurs tangentes au point d'intersection. La propriété de la *conservation des angles* consiste en ceci ; l'angle de deux lignes est égal à celui de leurs transformées par inversion.

Pour le démontrer, considérons d'abord une ligne C, et M un point de cette ligne, soit C′ la ligne inverse sur laquelle est le point M′ inverse de M. Si M_1, est un point voisin de M, et M'_1 l'inverse de M_1, les quatre points MM_1 $M'M'_1$ sont sur un même cercle Σ. Quand M_1 vient se confondre avec M, le cercle devient tangent en M à la courbe C. Le point M'_1 vient alors en M′ de sorte que la droite $M'M'_1$ devient tangente au cercle Σ. Il en résulte que la courbe C′ admet une tangente en M′ et que les deux tangentes en M et M′ aux deux lignes C et C′, sont tangentes à un même cercle Σ, dont le plan passe par le pôle O d'inversion.

§ **141.** — Cela posé. soient deux courbes C et C_1, se coupant en M, deux courbes inverses C′ et C'_1 passant par M′, soit T le point où se coupent les tangentes en M et M′ aux courbes C et C′, T_1, le point de rencontre des tangentes aux mêmes points à C_1 et C'_1 ; on a TM = TM′ *(tangentes issues d'un même point).* De même $T_1M = T_1M'$. D'où suit l'égalité des triangles TMT_1, $TM'T_1$, qui ont leurs trois côtés égaux. Les angles TMT_1 $TM'T_1$ sont alors égaux *(ce qu'il fallait démontrer).*

§ **142.** — Théorème. — La figure inverse d'une droite est un cercle passant par le pôle d'inversion ; la figure inverse d'une sphère est un plan passant par le pôle.

Soit D une droite, M un point de cette droite, M′ l'inverse de M. Menons du pôle la perpendiculaire OH sur D, coupant D en H, et soit H′ l'inverse de H. On a : $OH \times OH' = OM \times OM'$ ou bien : $\frac{OM}{OH} = \frac{OH'}{OM'}$. Ce qui démontre la similitude des triangles OM′H′, OMH, et par suite l'égalité des angles OM′H′, OHM, comme ce dernier est droit, le premier l'est aussi, et le point M′ est sur le cercle ayant OH′ comme diamètre : réciproquement un cercle décrit sur OH′ comme diamètre, aura pour inverse D.

En faisant tourner la figure autour de OH′, la droite engendre un plan et le cercle une sphère passant par O ; le plan a donc pour inverse la sphère.

§ **143.** — Théorème. — La figure inverse d'un cercle dont le plan passe par le pôle est un cercle. Le pôle est le centre de similitude de ces deux cercles. La figure inverse d'une sphère est une sphère ; le pôle est le centre de similitude de ces deux sphères. 1° Soit C, un cercle, M un de ses points, M′ son inverse, M_1 le point où OM rencontre de nouveau le cercle C. On a l'égalité : $OM \times OM' = k$. D'autre part on a par la géométrie élémentaire $OM \times OM_1 = p$ (p est une constante appelée comme on sait la puissance de O par rapport au cercle C) on a donc $\frac{OM'}{OM_1} = \frac{R}{p}$, le lieu de M′ est donc la figure homothétique du lieu de M_1 c'est-à-dire un cercle ayant avec

C le point O pour centre de similitude. 2° En faisant tourner la figure autour de la ligne des centres, on obtient deux sphères, qui sont ainsi inverses l'une de l'autre, et qui ont O pour centre de similitude.

§ **144.** — Théorème. — Deux sphères dans l'espace (ou deux cercles dans un plan) sont toujours inverses l'un de l'autre, le pôle d'inversion étant l'un quelconque des centres de similitude. En effet soit M un point de l'une des sphères, O un centre de similitude, M'_1 le point homologue de M c'est-à-dire un point où OM coupe la deuxième sphère, et tel que $\frac{OM}{OM'_1} = \frac{R}{R'}$ rapport des rayons des deux sphères. OM rencontre la seconde sphère en un point M' autre que M'_1 tel que $OM' \times OM'_1 = p$, p étant la puissance du point O par rapport à cette sphère. En multipliant membre à membre les deux égalités ci-dessus, on a : $OM \times OM' = p.\frac{R}{R'}$.

Ceci démontre la proposition.

§ **145.** — Théorème. — L'inverse d'un cercle dans l'espace est un autre cercle, car un cercle est l'intersection de deux sphères ; sa figure inverse est l'intersection des deux sphères inverses, c'est-à-dire un cercle.

§ **146.** — Relation entre les longueurs. — Soient A et B deux points, A' et B' leurs inverses. De ce que $OA \times OA' = OB \times OB'$, ou $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$ on déduit que les triangles OAB, OB'A' sont semblables, on a donc : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OB'} = \frac{OA \times OB}{OB \times OB'} = \frac{OA \times OB}{k}$ donc : $A'B' = \frac{k.AB}{OA\,OB}$: formule qui sera utile dans la suite.

Intersection d'une droite avec une sphère ou un cercle

§ **147.** — Soit S une sphère de centre O, de rayon R ; D une droite A un point de D, A' le point où D rencontre le plan polaire de A. Du centre O abaissons $O\mu$ perpendiculaire sur D et la coupant en μ on a :

$$\omega A \times \omega A' = R^2 - O\omega^2 \text{ (§ 35)}$$

A et A′ forment ainsi une involution. Les points doubles sont les points où D coupe la sphère. Pour les déterminer. prenons un point P sur la droite D, et soit $PA = x$, $PA' = x'$. $P\omega = d$, $PO = a$, $O\omega = h$ on a $PO^2 = P\omega^2 + O\omega^2$ ou $a^2 = d^2 + h^2$ on aura : $\omega A = x - d$, $\omega A' = x' - d$, la relation précédente s'écrira donc :

$$(x - d)(x' - d) = R^2 - h^2$$

ou en développant et remplaçant $d^2 + h^2$ par a^2 :

$$xx' - d(x + x') + a^2 - R^2 = 0$$

En faisant $x = x'$, on a l'équation :

$$x^2 - 2dx + a^2 - R^2 = 0$$

donnant les abcisses PM, PM′ des points M et M′ où la droite rencontre la sphère. On voit que le produit de ces racines est $a^2 - R^2$. Il ne change pas quand la sécante tourne autour de P. C'est là une proposition bien connue, mais la démonstration précédente s'applique encore quand M et M′ sont imaginaires.

On raisonnerait sur un cercle dans le plan comme nous avons raisonné sur une sphère dans l'espace.

§ **148**. — En prenant dans l'espace par rapport à la sphère (dans le plan par rapport au cercle) les polaires réciproques, on a à la place des points où D coupe la sphère, les plans tangents menés à cette sphère par la droite Δ conjuguée de D. (Dans le plan à la place des points où D coupe le cercle, on a les tangentes menées au cercle par le pôle Δ de la droite D.)

§ **149**. — *Points à l'infini sur un cercle ou sur une sphère.* — Considérons d'abord un cercle dans le plan, et supposons que la droite D soit à l'infini. Soit A un point sur D. La polaire de A passera par le centre O du cercle, pôle de D, ce sera une droite OA′ perpendiculaire sur D. Les points A et A′ sont donc les deux points où les deux côtés

OA OA' d'un angle droit coupent la droite de l'infini. Les points doubles de l'involution A, A', s'appellent les points I et J, ce sont les points où le cercle rencontre la droite D de l'infini. Considérons deux points O et O', deux angles droits pivotant autour de ces points : ces deux angles droits découperont les mêmes divisions en involution sur la droite de l'infini, car si les deux premiers côtés se coupent sur cette droite, c'est-à-dire sont parallèles, les deux seconds côtés seront aussi parallèles.

§ **150**. — Tous les cercles coupent donc la droite de l'infini aux mêmes points, dits points I et J, ou points circulaires de l'infini ou *points cycliques* du plan. Les deux points où les côtés de l'angle droit quelconque AOA' coupent la droite de l'infini, sont conjugués par rapport à ces points.

§ **151**. — Dans l'espace, considérons une droite D à l'infini et une sphère S de centre O. Le plan OD coupe la sphère suivant un cercle C' qui coupe D aux deux points cycliques du plan OD.

En faisant tourner le cercle C de façon qu'il engendre la sphère, la droite D engendre le plan de l'infini, et les points cycliques décrivent le cercle d'intersection de la sphère S et du plan de l'infini *(Cercle de l'infini)*.

Ce cercle sera le même pour toutes les sphères possibles, puisque dans le plan les points cycliques sont les mêmes pour tous les cercles possibles (voir aussi § 130).

§ **152**. — Un point A étant dans le plan de l'infini, le plan polaire de A sera le plan mené par O (centre de la sphère) perpendiculaire sur OA. Il coupera le plan de l'infini suivant une droite Δ polaire de A par rapport au cercle de l'infini.

Puissance d'un point. — Axes radicaux

§ **153** — Soient dans le plan deux cercles de centre C et C', de

rayons R et R'. Le lieu du point M ayant même puissance par rapport à C et C' est une droite perpendiculaire à la ligne des centres, appelée l'axe radical de ces deux cercles.

En effet, en égalant les puissances d'un point M par rapport aux deux cercles, on a :

$$MC^2 - R^2 = MC'^2 - R'^2$$

ou bien :
$$MC^2 - MC'^2 = R^2 - R'^2$$

mais $MC^2 = MP^2 + CP^2$, P étant le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur CC' ; de même : $MC'^2 = MP^2 + C'P^2$ il en résulte que : $C'P^2 - CP^2 = R'^2 - R^2$ or (§ 4) on a $C'P - CP = CC'$ donc :

$$C'P + CP = \frac{R'^2 - R^2}{CC'}$$

$C'P + CP$ et $C'P - CP$ étant constants, le point P est fixe, ce qui démontre la proposition.

L'axe radical passe par les deux points réels ou non où se coupent les deux cercles, car ces points ont une puissance nulle par rapport à ces deux cercles.

§ **154**. — Les axes radicaux de trois cercles C_1 C_2 C_3 pris deux à deux, se coupent au même point. En effet, soit M le point où se coupent les axes radicaux de C_1 C_2 et de C_1 C_3. Ce point aura même puissance à la fois par rapport à C_1 C_2 et C_3 il sera donc sur l'axe radical de C_2 et C_3 ce qui démontre la proposition.

§ **155**. — Théorème. — Deux cercles quelconques sont toujours homologiques de deux façons. Le centre d'homologie est l'un des centres de similitude, l'axe d'homologie est l'axe radical.

Soit S l'un des centres de similitude de C et C'. C'est en même temps un pôle d'inversion ; soient M et M_1 deux points de C, M' M'_1 leurs inverses sur C'. Comme $SM \times SM' = SM_1 \times SM'_1$, M M' M_1 M'_1 sont sur un même cercle Σ. MM_1 est l'axe radical de C et Σ, $M'M'_1$ est celui de C' et Σ, donc d'après le théorème précédent MM_1 et $M'M'_1$ se coupent sur l'axe radical de C et de C'. Donc M' est l'homologue de M dans

l'homologie de centre S, ayant pour axe l'axe radical de C et de C′ et dont M_1 et M'_1 sont deux points correspondants *(ce qu'il fallait démontrer)*.

§ **156**. — Extension aux sphères. — En faisant tourner la figure autour de la ligne des centres, on déduit de là les énoncés suivants relatifs à des sphères :

1° Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères est un plan, dit plan radical, perpendiculaire à la ligne des centres.

2° Les plans radicaux de trois sphères prises deux à deux se coupent suivant une même droite *(axe radical)*.

3° Deux sphères sont homologiques de deux façons, l'axe d'homologie est l'axe radical, le centre d'homologie est l'un des centres de similitude.

On verra aussi, comme pour les cercles, que les plans radicaux de quatre sphères prises deux à deux, passent par un même point ayant même puissance par rapport aux quatre sphères.

§ **157**. — *Rapport anharmonique de quatre points d'un cercle ou de quatre tangentes.*

Soit Σ un cercle P un point de ce cercle, Δ une tangente ; si ABCD sont quatre autres points de Σ, et si les tangentes en ces points coupent Δ en $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, je dis que l'on a $P\ (A\ B\ C\ D) = (\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta)$.

Pour éviter des considérations d'angles qui s'appliqueraient mal au cas des points imaginaires, je démontre ce théorème par inversion. P étant pris pour pôle d'inversion, ABCD se transforment en quatre points A′ B′ C′ D′ en ligne droite (parce que le pôle est sur le cercle) et l'on a : (§ 146).

$$C'A' = \frac{k\ CA}{PC \times PA} \quad C'B' = \frac{k.\ CB}{PC.\ PB} \quad D'A' = \frac{k.\ DA}{PD.\ PA} \quad D'B' = \frac{k.\ DB}{PD.\ PB}$$

d'où l'on déduit : $\dfrac{C'A'}{C'B'} : \dfrac{D'A'}{D'B'} = \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$

Le second membre ne dépendant pas de la position du point P, le premier qui est égal à P (A B C D) n'en dépend pas non plus. — Nous

n'avons pas tenu compte des signes. Nous avons simplement prouvé que si P et P' sont deux points du cercle, on a : P (ABCD) = P' (ABCD) en grandeur. Or si P' décrit le cercle, P' (ABCD) variant d'une manière continue, ne pourrait changer de signe sans s'annuler ou devenir infini (1) ce qui est impossible, puisqu'il garde toujours la même valeur absolue. Il y a donc toujours le même signe.

Si l'un des points était imaginaire, on raisonnerait de même sur la partie réelle du rapport anharmonique, qui ne peut changer de signe sans s'annuler ou devenir infinie, ou bien sur la partie imaginaire, si la partie réelle était nulle.

§ **159**. — Envisageons maintenant les quatre points $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ où la tangente en Q rencontre les tangentes en ABCD. Comme ils ont pour polaires QA QB QC QD, on a (§ 130) Q (ABCD) = $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ et comme P (ABCD) = Q (ABCD) on a P (ABCD) = $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$, ce qui démontre la proposition.

§ **160**. — *Remarque*. — Si les points A et B étaient les points *cycliques*, les distances CA, CB, etc., seraient indéterminées, et la formule qui nous a servi deviendrait illusoire. On tourne la difficulté en transformant le cercle en un autre par homologie, ce qui est possible (§ 155). L'homologie n'altérant pas les rapports anharmoniques, le théorème s'appliquera à l'un des cercles, car il s'applique à l'autre les points cycliques étant changés en deux autres points.

§ **161**. — Une autre remarque à faire, c'est que l'hexagone PQABCD est de *Pascal* (§ 27) dès lors l'égalité P (ABCD) = Q (ABCD) en entraîne d'autres, comme on l'a vu à ce paragraphe.

§ **162**. — Voici encore une conséquence de ce qui précède. Considérons deux angles, AOB, APB, dont les côtés se coupent en A et B, et qui sont égaux et placés de façon que AOBP soient sur un même cercle. Les points cycliques I et J étant aussi sur ce cercle on aura :

(1) On voit sans peine que le rapport anharmonique P (ABCD) est une fonction continue des coordonnées du point P.

O (ABIJ) = P (ABIJ), et si OA, OB, PA PB coupent la droite de l'infini en $\alpha\ \beta\ \alpha'\ \beta'$ on aura

$$(\alpha\,\beta\,I\,J) = (\alpha'\,\beta'\,I\,J)$$

de sorte que l'égalité des deux angles se traduit par celles de ces deux rapports anharmoniques.

§ **163**. — Propriétés projectives. — Si une propriété d'une figure F subsiste pour son homologique ou sa perspective F', on dit que cette propriété est projective. La propriété pour quatre points d'être en ligne droite, d'avoir un rapport anharmonique déterminé, pour quatre droites de concourir, d'avoir un rapport anharmonique donné, subsistant dans les figures homologiques, sont des propriétés *projectives.*

ONZIÈME LEÇON

Définition des sections coniques. Théorème de Chasles. Applications

§ **184**. — La section par un plan quelconque d'un cône oblique à base circulaire se nomme *section conique*, ou simplement *conique*.

La section d'un cône de sommet S ayant pour base un cercle C, par un plan P, peut être considérée comme la projection conique ou perspective du cercle C sur le plan P, le sommet de projection étant situé en S. Comme deux figures perspectives peuvent être placées de façon à être homologiques, et réciproquement, une section conique peut être définie comme la figure homologique d'un cercle.

Toutes les propriétés projectives d'un cercle peuvent donc être appliquées aux coniques. Nous les déduirons toutes, comme l'a fait Chasles de deux d'entre elles. Si A B C D P et H sont six *points* d'un cercle, on a $P\,(ABCD) = H\,(ABCD)$; de même si ces lettres désignent six *tangentes* au cercle, PA désignant le point de rencontre de P et A, on a la même égalité (§ 158, 159).

Ces propriétés, d'après les § 27 et 28, peuvent être énoncées ainsi : Tout hexagone inscrit à une conique est un hexagone de *Pascal*, tout hexagone circonscrit est un hexagone de *Brianchon*. Ces hexagones possèdent donc les propriétés énoncées aux § 29 et 30.

§ **165**. — Soient A et B deux points fixes sur une conique, et M un point variable. On peut écrire avec une notation déjà employée : $A\,(M) = B\,(M)$, c'est-à-dire que les deux faisceaux AM et BM sont homographiques. Si M vient en A, le rayon AM devient tangent en A à la courbe, tandis que BM devient BA. La tangente en A, rayon

du premier faisceau, a pour homologue le rayon BA. De même le rayon AB a pour homologue la tangente en B.

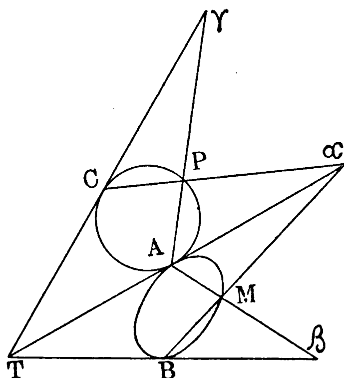
§ **166**. — *Corrélativement*, si A et B sont deux tangentes fixes, M une tangente variable, on a A (M) = B (M), c'est-à-dire que la droite M découpe sur A et B deux divisions homographiques. D'ailleurs si M vient se confondre avec A, le point où A est coupé par M devient le point où A touche la courbe, tandis que le point de rencontre de B et de M devient celui de B et de A. Ainsi sur la droite A, le point où A touche la courbe a pour correspondant le point de rencontre de A et de B, de même le point où A coupe B a pour correspondant sur la droite B le point où B touche la courbe.

§ **167**. — Les *réciproques* de ces théorèmes sont vraies, nous allons les démontrer.

1° *Le lieu du point de rencontre de deux rayons homologues dans deux faisceaux homographiques est une action conique.*

En effet, soient A et B les sommets des deux faisceaux, on verra, comme précédemment, que la droite A B a pour rayon correspondant dans le premier faisceau, la tangente en A, et dans le second faisceau la tangente en B.

Soit T le point où ces deux tangentes se coupent, considérons un plan passant par le tangente AT, et dans ce plan un cercle quelconque tangent à cette droite en A ; menons ensuite du point T la seconde tangente au cercle, le touchant en C ; soient AM et BM deux rayons correspondants, AM coupe BT en β, BM coupe AT en α, joignons αC qui coupe le cercle en P, et joignons AP qui coupe CT en γ. De ce que B (M) = A (M) on déduit $(\alpha) = (\beta)$; de ce que AP et CP se coupent sur le cercle, on déduit



A (P) = C (P) et par suite $(\gamma) = (\alpha)$ par conséquent $(\beta) = (\gamma)$, d'autre part, quand β vient en T, c'est que M vient en A ; alors α vient en A ; P vient en A et γ vient en T ; donc, dans les deux divisions homographiques β et γ, le point T est à lui-même son propre correspondant ; donc la droite $\beta\gamma$ passe par un point fixe. Comme B et C sont deux points correspondants (si β vient en B, α vient en T, γ vient en C) ce point fixe est un point S de la droite BC ; alors si on prend S pour centre de projection, B se projette en C, et β en γ $B\alpha$ et $A\beta$ qui se coupent en M, se projettent suivant $C\alpha$ et $A\gamma$ qui se coupent en P, donc M se projette en P, et la courbe lieu de M, a pour projection le cercle lieu de P (*ce qu'il fallait démontrer*).

§ **168**. — 2° *La droite qui joint deux points correspondants de deux divisions homographiques est tangente à une section conique.*

Soient AT et BT les droites qui portent les divisions, A et B les points qui correspondent à T sur les deux droites ; faisons passer par AT un plan. Dans ce plan, traçons un un cercle tangent en A à AT, menons de T β la seconde tangente au cercle, qui le touche en C. Soient α et β deux points correspondants sur AT et BT, $\alpha\gamma$ une tangente à C, qui coupe CT en γ, ou par hypothèse $(\alpha) = (\beta)$; puisque $\alpha\gamma$ touche le cercle on a $(\alpha) = (\gamma)$ par conséquent $(\beta) = (\gamma)$, d'autre part quand vient en T, α vient en A et γ vient en T, donc $\beta\gamma$ passe par un point fixe, qui se trouve d'ailleurs sur BC car si β vient en B, α vient en T et γ vient en C. Soit S ce point, en le prenant pour sommet de projection, $\alpha\gamma$ est la projection de $\alpha\beta$, le plan $S\alpha\beta$ touche donc le cône de sommet S ayant pour base le cercle, alors la droite $\alpha\beta$ trace du plan $S\alpha\gamma$ sur le plan ABT touche la conique suivant laquelle ce cône coupe le plan ABT (*ce qu'il fallait démontrer*).

Conséquences des théorèmes précédents. — Tracé des coniques

§ **169**. — Théorème. — *Cinq points déterminent une conique*, ou d'une façon plus précise, par cinq points dont trois ne sont pas en ligne droite, on peut faire passer une conique et une seule.

En effet soient ABCDE les cinq points, prenons les points A et B comme sommets de deux faisceaux ; on connaît trois couples de rayons correspondants AC, BC, AD BD AE, BE, l'homographie est donc déterminée, on peut construire le correspondant AM d'un rayon quelconque BM, et par suite construire la courbe par points; on aura la tangente en A par exemple en cherchant le rayon homologue de BA.

§ **170**. — Théorème. — *Cinq tangentes déterminent une conique*. D'une façon plus précise si parmi cinq droites il n'y en a pas trois concourantes, il existe une conique et une seule tangente à ces cinq droites.

En effet, soient ABCDE les cinq droites, prenons les droites A et B comme bases de deux divisions homographiques, on connaît trois couples de points correspondants AC, BC AD, BD AE, BE (AC signifie toujours le point de rencontre de A et C). L'homographie est donc déterminée, on peut construire le point AM situé sur A correspondant d'un point donné BM sur B. Alors la droite M est déterminée ; on peut construire la courbe par tangentes. On pourra trouver le point où une tangente A par exemple touche la courbe, en cherchant le point situé sur A. homologue du point où B coupe A.

§ **171**. — Problème. — Une conique étant donnée par cinq points, trouver ses points de rencontre avec une droite donnée Δ.

Soient ABCDE les points donnés ; les points où les rayons correspondants AM BM coupent Δ forment deux divisions homographi-

ques, on a d'ailleurs trois couples de points correspondants, les points, $c\ c'\ d\ d'\ e\ e'$ où AC BC AD BD AE BE coupent Δ, les points doubles de ces deux divisions sont les points cherchés.

§ **172**. — Problème. — Une conique étant donnée par cinq tangentes, trouver les tangentes issues d'un point Δ à cette conique.

Soient ABCDE les tangentes données ; une tangente mobile M coupant A en α et B en β, $\Delta\alpha$ $\Delta\beta$ forment deux faisceaux homographiques, d'ailleurs pour que $\alpha\beta$ qui est une tangente passe par Δ il faut que $\Delta\alpha$ $\Delta\beta$ coïncident. Il faut donc trouver les rayons doubles de ces deux faisceaux. Or on connaît trois couples de rayons correspondants obtenus en joignant Δ aux points AC, BC, AD BD, AE BE. On pourra donc construire les rayons doubles.

Remarque. — Dans le premier problème, Δ peut être la droite de l'infini, il s'agit alors de trouver dans les deux faisceaux deux rayons parallèles. On y parvient en menant par le sommet de l'un des faisceaux A, des parallèles aux rayons de l'autre, on a alors deux faisceaux de même sommet, dont on cherchera les rayons doubles.

Si ces deux rayons sont réels et distincts, la courbe a deux points à l'infini, on la nomme une hyperbole.

S'ils sont confondus, la courbe est tangente à la droite de l'infini. On l'appelle une parabole.

Enfin si les rayons doubles sont imaginaires, la courbe qui n'a pas de points à l'infini se nomme ellipse.

§ **173**. — Dans le cas de *l'hyperbole*, on peut prendre les points à l'infini comme sommets des deux faisceaux déterminant la courbe. Les faisceaux sont alors formés de droites parallèles, les rayons du premier à une droite A, les rayons du second à une droite B ; proposons-nous de trouver la tangente en A par exemple (le point A étant à l'infini). C'est la droite du faisceau A qui correspond au rayon B à l'infini. Il suffit d'avoir un point de cette droite puisqu'on a sa direction. Or si on coupe les faisceaux par une droite, on aura deux divisions homographiques, le point cherché est celui dont l'homologue

dans la deuxième division est à l'infini ; on sait donc le construire. Les tangentes à l'infini se nomment les asymptotes de la courbe.

§ **174.** — Théorème de Desargues. — *Toutes les coniques passant par quatre points* ABCD *coupent une droite* Δ *en deux points* M *et* M *correspondants d'une involution.* Les couples de côtés opposés et les diagonales coupent Δ en trois couples de points correspondants de cette involution.

On a en effet (§ 166) $A\,(BC\ MM') = D\,(BC\ MM')$

Si α est le point où AB coupe Δ, β le point où AC rencontre cette même droite, β' et α' ceux où Δ est rencontré par DB et DC, on aura :

$$(\alpha\beta\ MM') = (\beta'\alpha'\ MM')$$

ce qui montre (§ 91) que M et M' sont deux couples de points correspondants d'une involution dont $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$ sont deux couples de points correspondants.

Le théorème corrélatif se démontre d'une façon analogue, ou en transformant le précédent par polaires réciproques. Les tangentes issues d'un point fixe Δ à toutes les coniques touchant quatre droites, forment deux faisceaux en involution. Les droites joignant Δ aux couples de sommets opposés ou aux faux sommets sont des couples de rayons correspondants.

Corollaire: soient deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D' inscrits dans une conique, $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ les points où se coupent (AB, A'B'), (AC, A'C'), (BC, B'C'), (BD, B'D'). Si $\alpha\,\beta\,\gamma$ sont en ligne droite, δ est sur cette droite.

En effet, soient δ_1 et δ_2 les points où la droite $\alpha\beta\gamma$ coupe BD et B'D'. Ce sont tous deux les points correspondants de γ dans l'involution dont $\alpha\beta$ et les points M M' où $\alpha\beta$ coupe la conique sont des couples de points correspondants, δ_1 et δ_2 sont donc un seul et même point, le point δ commun à BD, B'D'. On énoncera facilement le théorème corrélatif.

§ **175.** — Le théorème de Pascal résulte de là. Décomposons l'hexagone inscrit en deux quadrilatères ABCD et DEFA. AB et DE se coupent

en I, EF et CD se coupent en K. Les côtés AD et DA coïncidant, on peut supposer que leur point de rencontre est sur la droite IK. Donc, d'après ce qui précède, le point L où se coupent BC et EF est aussi sur IK, les points I K L sont en ligne droite.

§ 176. — Comme application, cherchons à déterminer des coniques passant par quatre points A B C D et touchant une droite donnée Δ. Pour que la conique passant par ABCD, dont il est question au théorème de Desargues, touche Δ, il faut que M et M' soient confondus; on a donc à déterminer les points doubles de l'involution, il y en a deux P et Q, il y a donc deux coniques répondant à la question, l'une passant par ABCDP, l'autre par ABCDQ.

On déterminerait d'une façon analogue les coniques tangentes à quatre droites et passant par un point.

§ 177. — On peut encore résoudre le problème de trouver les coniques passant par trois points A B C et tangentes à deux droites données Δ Δ'

Pour résoudre ce problème, faisons d'abord une remarque relative au théorème de Desargues. Si AB et CD viennent se confondre, auquel cas toutes les coniques sont tangentes en A et B aux deux droites fixes AC et BD, les points α et α' sont confondus, et l'on a un point double en α pour l'involution.

Cela posé, pour résoudre le problème en question, cherchons les points R et S inconnus où la conique cherchée touche Δ et Δ'; cherchons le point I où RS coupe AB; toutes les coniques tangentes en R et S à Δ et Δ' déterminent sur AB une involution, dont A B sont des points correspondants, ainsi que les points α et β où AB coupe Δ et Δ'; les points doubles I et I' peuvent donc être déterminés. De même les points doubles K et K' de l'involution analogue sur AC, donc la ligne RS est IK, ou IK', ou I'K, ou I'K', il y a donc quatre solutions. Les points doubles analogues sur BC que l'on peut aussi construire doivent se trouver aussi sur ces droites.

On résout de la façon corrélative le problème de construire une conique connaissant deux points et trois tangentes.

Application des théorèmes de Pascal et de Brianchon au tracé des coniques

§ **178.** — 1° *Problème.* — Cinq points d'une conique étant donnés, construire un sixième point quelconque, et la tangente en l'un des cinq points.

Soient ABCDE les cinq points ; par le point A menons une droite quelconque qui constituera le côté AF d'un hexagone ABCDEF inscrit dans la conique. Il s'agit de trouver le point F. Supposons que AB et DE se coupent en α et que CD et AF se coupent en β, le point de rencontre γ des côtés BC et EF sera sur $\alpha\beta$, on pourra donc le construire en prenant l'intersection de BC et $\alpha\beta$, en joignant γE on aura le côté EF qui coupera en F le côté AF. On aura ainsi un sixième point quelconque de la conique

Pour avoir la tangente en A, on supposera que AF est cette tangente ; alors A et F devront coïncider. On prendra le point α où se coupent AB et DE, le point γ où se coupent EF (c'est-à-dire EA) et BC. on prend le point β, où CD coupe $\alpha\gamma$. AF doit passer par ce point, c'est donc la droite Aγ.

§ **179.** — 2° *Problème.* — Cinq tangentes d'une conique étant données, construire une sixième tangente quelconque, et le point de contact de l'une des cinq tangentes.

Soient ABCDE les cinq tangentes. Prenons sur la droite A un point quelconque, qui constituera le sommet AF d'un hexagone circonscrit à la conique. Il s'agit de trouver le côté F. Supposons que la droite, joignant le sommet AB au sommet DE soit α, celle qui joint CD et AF soit β ; la droite γ qui joint BC et EF passera par le point de concours de α et β, on pourra donc la construire en joignant BC à ce point de

concours $\alpha\beta$. Le point où γ rencontre E sera le sommet EF. En joignant ce sommet au sommet AF on aura la droite F.

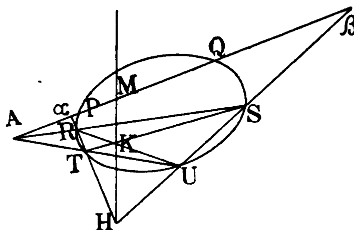
Pour avoir le point de contact de A, on supposera que ce point est le sommet AF, alors les côtés A et F devront coïncider. On joindra AB et DE par une droite α, EF (c'est-à-dire EA) et BC, par une droite γ, on a la droite β joignant CD au point de concours de α et γ, le sommet AF est sur cette droite, c'est donc le point où cette droite γ coupe A.

DOUZIÈME LEÇON

Pôle et Polaire, Centre, Diamètre et Axes

§ 180. — On peut déduire la théorie des pôles et polaires dans les coniques de la même théorie dans le cercle, en transformant le cercle en conique par homologie. Voici une autre manière de procéder, fondée sur le théorème de Desargues.

Proposition 1. — Autour d'un point A on fait tourner une droite coupant en P et Q une conique C. M étant le conjugué hormonique de A par rapport à P et Q, le lieu de M est une droite dite polaire de A, qui passe par les points de contact des tangentes issues de A à la conique C. A se nomme le pôle de cette droite. Outre la droite Δ coupant la conique en P et Q, considérons-en deux autres passant par A et la coupant en RS et TU. Toutes les coniques passant par RSTU déterminent sur APQ une involution (§ 174). Les côtés



RS et TU coupant cette droite en A tous les deux, A se correspond à lui-même. Le second point double est alors le point M conjugué de A par rapport à P et Q, mais les points A et M sont conjugués par rapport à deux points correspondants quelconques, tels que les points α et β où la droite APQ est rencontrée par RT et SV. Le lieu de M est donc le lieu du conjugué de A par rapport au couple de droites RT SU, c'est donc une droite (§ 25). Si on joint RT, SU qui se coupent en H, RU, TS qui se coupent en K, cette droite est la droite HK.

Si on méne par A une tangente à la conique, les points où cette

droite coupe la courbe, sont confondus au point de contact. Le conjugué de A est alors ce point de contact lui-même qui est ainsi sur la polaire de A *(ce qu'il fallait démontrer)*.

1re Remarque. — Si RS, TU tournent autour de A, H et K décrivent la polaire de A.

2me Remarque. — Si RS, TU coïncident, RT, SU sont les tangentes en R et S, donc les tangentes aux points où la droite ARS coupe la courbe, se coupent sur la polaire de A.

§ **181**. — PROPOSITION II. — *Si la polaire du point A passe par un point B, celle du point B passe par le point A.*

En effet, dire que la polaire de A passe par B, c'est dire que A et B sont conjugués par rapport aux deux points réels ou imaginaires où AB coupe la conique. On énonce la même chose en disant que la polaire de B passe par A.

Autrement : La polaire de A est le lieu des points K et H dont il a été question ci-dessus ; si donc la polaire de A passe par B, on peut supposer que B coïncide avec l'un de ces points, K par exemple, c'est-à-dire que les droites RT et SU passent par B. Mais alors la polaire de B passera par le point où se coupent RS et TU (même proposition), c'est-à-dire par le point A.

La seconde remarque du paragraphe précédent résulte de là, car le point B où se coupent les tangentes en R et S, a pour polaire RS qui passe par A. La polaire de A doit donc passer par B.

On voit que si des points sont en ligne droite, leurs polaires sont concourantes. En effet, si des points M sont sur une droite D ayant P pour pôle, la polaire de P sera la droite D qui passe par M, donc la polaire de M passera par P.

De même des droites concourantes en un même point ont leurs pôles sur une même droite.

§ **182**. — PROPOSITION III. — *Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est le même que celui de leurs quatre polaires concourantes.*

En effet, soit M un point d'une droite D, M' le conjugué de M sur D, c'est le point où la polaire de M coupe D; M et M' étant conjugués par rapport aux deux points où la conique C est coupée par D, sont deux points correspondants d'une involution; le rapport anharmonique de quatre points M est donc égal à celui des quatre points M', c'est-à-dire des quatre polaires. La proposition est donc démontrée.

A l'aide des propositions précédentes, on peut définir les figures polaires réciproques par rapport à une section conique comme on l'a fait pour le cercle. A un point P on fera correspondre sa polaire par rapport à une conique appelée conique de référence. Les propriétés de réciprocité que nous avons démontrées alors subsistent ici avec leurs démonstrations.

§ **183**. — Proposition IV. — La *polaire réciproque d'une conique est une autre conique.* — En effet, soit une conique C, A et B deux points fixes de C, M un point variable. Aux points A et B correspondent deux droites A_1 B_1 au point M une droite M_1. Comme A (M) = B (M) la proposition III donne A_1 $(M_1) = B_1$ (M_1) c'est-à-dire que la droite M_1 joint les deux points correspondants A_1 M_1, B_1 M_1 de deux divisions homographiques sur les droites A_1 et B_1. Elle touche donc une conique C' qui est ainsi la polaire réciproque de C.

§ **184**. — Droites conjuguées. — On nomme ainsi deux droites telles que la première soit polaire d'un certain point de la seconde. Il résulte alors de la proposition II, que la seconde est la polaire d'un point situé sur la première.

Supposons que A soit le point de concours de deux droites conjuguées D et D', soit P le pôle de D, situé sur D', P' le pôle de D', situé sur D, le pôle de PP' est à la fois sur D et D', puisque le pôle de D et celui de D' sont sur PP'. (Proposition II) donc PP' est la polaire de A; elle passe par les points de contact des tangentes T T' réelles ou imaginaires issues de A, et alors AP AP' forment avec ces tangentes un faisceau harmonique.

Il est clair que si inversement deux droites forment un faisceau har-

monique avec les tangentes issues de leur point de contact, elles sont conjuguées, le pôle de l'une est le point où l'autre coupe la corde des contacts.

§ **185**. — *Proposition* V. — A deux points conjugués par rapport à une conique C, correspondent dans la figure polaire réciproque deux droites conjuguées par rapport à la courbe C', polaire réciproque de C.

En effet, soient A et B deux points conjugués par rapport à C, c'est-à-dire tels que AB coupe C en deux points P et Q tels que AB PQ = — 1. A la droite AB correspond un point S, aux points AB PQ quatre droites A_1 B_1 P_1 Q_1 concourantes en S, P_1 Q_1 touchent C', puisqu'elles correspondent à deux points de C, et l'on a (Proposition III) $(A_1 B_1 P_1 Q_1) = -1$. Ce qui démontre la proposition.

Corollaire. Si un point P et une droite D sont pôle et polaires par rapport à C, la droite P_1 correspondant à P, et le point D_1 correspondant à D, sont polaire et pôle par rapport à C'. En effet D est le lieu des conjugués de P, par rapport aux points où une droite variable contenant P coupe la courbe, donc D_1 est l'enveloppe des conjuguées de la droite P_1 par rapport aux tangentes issues des différents points de P_1 ; mais cette enveloppe est précisément le pôle de P_1 car toutes les conjuguées d'une droite contiennent le pôle de cette droite.

§ **186**. — Proposition VI. — Diamètres. — Supposons qu'un point s'éloigne à l'infini ; le conjugué de ce point par rapport à deux points P et Q d'une droite qui le contient, devient le *milieu* de P Q (§ 24).

Si donc un point est à l'infini dans une direction A, sa polaire devient le lieu des milieux des cordes parallèles à A.

Donc l'on conclut la proposition suivante.

Le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée dans une conique est une droite. Cettre droite se nomme le diamètre conjugué de la direction des cordes.

§ **187**. — Proposition VII. — Tous les diamètres passent par un point fixe, centre de la courbe. En effet, quand une droite D s'éloigne à

l'infini. son pôle devient un certain point O, tel que toute droite passant par O coupe la courbe en P et Q dont O est le milieu (O et le point à l'infini sur PQ étant conjugués par rapport à P et Q) O est le centre. C'est donc le pôle de la droite de l'infini, si donc un point A est à l'infini, cela veut dire qu'il est sur la polaire de O. Donc (Proposition II). La polaire de A (c'est-à-dire un diamètre) passe par O (§ 181).

Remarque. — Si la courbe est une parabole, la droite de l'infini lui est tangente. Or on voit sans peine que si une droite touche une conique, son pôle est le point de contact, le centre de la parabole est donc le point où cette courbe touche la droite de l'infini; il est donc à l'infini, d'où il résulte que dans une parabole, tous les diamètres sont parallèles.

§ **188.** — Proposition VIII. — Toute droite passant par le centre est un diamètre, car cette droite passant par O, son pôle est sur la polaire de O, c'est-à-dire à l'infini.

§ **189.** — Proposition IX. — Si le diamètre d'une direction A est parallèle à une direction B, le diamètre conjugué de la direction B est parallèle à la direction A. En effet, dire que le diamètre conjugué de A est parallèle à B, c'est dire que la polaire du point A à l'infini contient le point B à l'infini; mais alors la polaire de B passe par A (Proposition II), c'est-à-dire que le diamètre conjugué de B est parallèle à la direction A.

§ **190.** — Proposition X. — La droite qui joint un point au centre d'une conique est le diamètre conjugué de la polaire de ce point.

En effet, soit A un point, B le point à l'infini sur la polaire de A; la polaire de A passe alors par B, donc la polaire de B passe par A, mais comme B est à l'infini, cette polaire n'est autre que le diamètre conjugué OA de la direction de la polaire de A (*ce qu'il fallait démontrer*).

Deux diamétres tels que l'un soit conjugué des cordes parallèles à l'autre, sont appelés diamètres conjugués. Ce sont deux droites conju-

guées passant par le centre, puisque l'un contient le pôle de l'autre à l'infini.

§ **191**. — Proposition XI. — Deux diamètres conjugués sont deux rayons correspondants de deux faisceaux en involution. En effet, deux droites conjuguées quelconques formant un faisceau harmonique avec les tangentes issues de leur point de rencontre, forment deux rayons correspondants d'une involution dont ces tangentes sont les rayons doubles. Il en est encore ainsi quand ces droites passent par le centre de la courbe. Les rayons doubles sont alors les asymptotes.

§ **192**. — Proposition XII. — Parmi les diamètres conjugués il y a toujours un couple rectangulaire, à moins qu'ils ne le soient tous.

Coupons le faisceau en involution par une droite quelconque D, et soit P le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur D, prenons ce point comme origine ; la relation d'involution a la forme

$$A\,x\,x' + B\,(x + x') + C = 0$$

Si un angle droit tourne autour de son sommet situé en P, il découpe sur D une autre involution dont P est le point central et donnée par la relation

$$x\,x' = -\,\overline{OP}^2$$

Il faut chercher les points communs à ces deux involutions, or la première relation donne en remplaçant $x\,x'$ par $\overline{OP}^2$

$$x + x' = -\,\frac{C - A}{B}$$

x et x' sont alors les racines de l'équation

$$x^2 + \frac{C - A}{B}\,x - \overline{OP}^2 = 0$$

dont les racines sont toujours réelles (1).

(1) Les points communs à deux involutions dont l'une a ses points doubles imaginaires sont toujours réels.

Le cas où B est nul ne doit pas embarrasser $x = \infty$ $x' = 0$ donneraient alors une solution, c'est-à-dire que la parallèle et la perpendiculaire à D résoudraient la question. D'ailleurs on peut éviter ce cas puisque D est une droite quelconque.

Toutefois, il pourrait arriver que les deux relations d'involution soient identiques, tous les couples de diamètres conjugés seraient rectangulaires, mais alors les points à l'infini sur ces diamètres sont conjugués par rapport aux points circulaires, ces points sont donc les points où la courbe est coupée par la droite de l'infini. Une telle courbe est un cercle, car si A et B sont deux points fixes sur la courbe, I et J les points circulaires, la courbe est le lieu des points M tels que M (AB IJ) soit constant, c'est-à-dire tel que l'angle AMB soit constant (§ 162), c'est donc un cercle.

§ **193**. — Dans la parabole, on ne peut pas parler de diamètres conjugés, car tous les diamètres sont parallèles, mais si nous considérons la perpendiculaire à leur direction commune, cette droite a pour direction conjuguée une direction perpendiculaire. On a donc bien encore deux directions conjuguées rectangulaires.

Un diamètre conjugué d'une direction rectangulaire se nomme un *axe*, il divise en deux parties égales les cordes qui lui sont perpendiculaires ; c'est donc bien un axe de symétrie de la courbe.

Dans les courbes à centre, il y a deux axes, mais dans la parabole il n'y en a qu'un, à savoir le diamètre conjugué de la direction perpendiculaire à la direction commune de tous les diamètres.

§ **194**. — Cordes supplémentaires. — Si on joint un point M d'une courbe à centre aux deux extrémités A et B d'un même diamètre, les droites MA et MB sont parallèles à deux directions conjuguées.

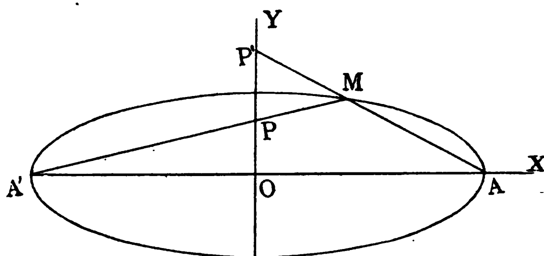
Soit en effet O le centre, qui est au milieu de AB, de ce que AO = OB il résulte que la droite menée par O parallèlement à MA passe par le milieu de MB, la parallèle à MA est donc bien conjuguée de la direction MB (*ce qu'il fallait démontrer*).

Equations des courbes à centre

§ **195**. — Considérons une courbe à centre ayant pour centre O, et soit A'A un diamètre de cette courbe. Le pôle de A'A étant à l'infini sur la direction conjuguée de A'A, les tangentes en A et A' qui passent par ce pôle sont parallèles au diamètre OY conjugué de A'A. Soit M un point de la courbe, AM et A'M forment deux faisceaux homographiques, et les points P et P' où ces rayons coupent OY forment deux divisions homographiques. Quand M vient en A, P va à l'infini et P' vient en O, quand M vient en A', P' va à l'infini, P vient en O. Les deux points I et S' se confondent donc ici en O, et par suite l'homographie est ici une involution, et O est le point central. Le produit OP × OP' est donc constant, désignons-le par K, on a :

$$OP \times OP' = K$$

D'autre part, prenons maintenant OA pour axe des x, et pour axe



des y la droite déjà désignée par OY, appelons a la longueur OA, x et y les coordonnées de M. Les triangles semblables OPA, HMA, *où* H *est le pied de l'ordonnée* HM *du point* M, donnent

$$\frac{OP}{HM} = \frac{OA}{HA}$$

il est facile de voir que cette égalité a toujours lieu en grandeur et signe.

De même on aura :

$$\frac{OP'}{HM} = \frac{OA'}{HA'}$$

et ceci également en grandeur et signe.

On aura donc :

$$\frac{OP}{y} = \frac{a}{a-x} \quad \text{et} \quad \frac{OP'}{y} = \frac{-a-x}{-a}$$

d'où en multipliant et remplaçant par k le produit OP $\times$ OP

$$\frac{k}{y^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

ou :

$$Kx^2 + a^2 y^2 = Ka^2$$

ou en divisant tout par a^2 K.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{K} - 1 = 0$$

Telle est l'équation de la courbe avec les axes de coordonnées que nous avons choisis.

§ **196**. — Nous distinguerons deux cas selon que K est positif ou négatif. Si K est positif posons $K = b^2$. Dans ce cas là, P et P' étant toujours du même côté de O, AP A'P' ne peuvent pas être parallèles ; M ne peut aller à l'infini, la courbe est donc une ellipse, P peut se confondre avec P', il suffit que $OP = \pm b$. Le diamètre OY coupe donc la courbe en deux points réels.

L'équation de *l'ellipse* avec deux diamètres conjugués (ou les axes) pour axes de coordonnées est donc :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

et $2a$ $2b$ sont les longueurs de ces deux diamètres.

Si nous supposons maintenant K négatif, nous pouvons poser $K = -b^2$. Ici il y a des points à l'infini, car si $OP = b$ on a $OP' = -b$, et AP, A'P' sont parallèles, il en est de même si $OP = -b$; on a alors

OP′ $= b$; la courbe est donc dans ce cas une *hyperbole*. On voit aussi que dans l'hyperbole, les asymptotes sont les diamètres confondus avec leurs conjugués.

L'équation de la courbe est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et l'on voit que le diamètre OY conjugué de OX coupe la courbe en deux points imaginaires. On appelle souvent $2b$ la longuenr d'un diamètre (ou de l'axe) non transverse ; mais les extrémités d'un diamètre ainsi entendu ne sont pas sur la courbe.

§ **197**. — L'équation de la *parabole* peut s'établir comme il suit : soit OA la direction commune des diamètres, A étant alors le point à l'infini dans cette direction. Nous prenons l'origine O sur la courbe OA pour axe des x, la tangente en O pour axe des y. Prenons une droite Δ parallèle à OY, qui coupe OX en H, soit M un point de la courbe ; OM coupe Δ en P, la parallèle MA, à OA le coupe en P′ ; comme OM et AM forment deux faisceaux homographiques, P et P′ forment sur Δ deux divisions homographiques, il est facile de voir que quand P est à l'infini, P′ vient en H, le rayon AO étant l'homologue de la tangente en O, de même quand P vient en O P′ va à l'infini, on a donc $HP \times HP' = k$, k étant une constante. Mais $HP = y$ et $\frac{HP'}{OH} = \frac{y}{x}$ donc le le produit $\frac{y^2}{x}$ est aussi constant ; en le désignant par $2p$, on a l'équation de la parabole $y^2 = 2px$.

En particulier, si on prend pour OX l'axe de la courbe, OY sera perpendiculaire à OX, et l'équation de la parabole aura la même forme, mais avec des axes de coordonnées rectangulaires.

TREIZIÈME LEÇON

Propriétés diverses des sections coniques

§ **198**. — Considérons une ellipse de centre O, et prenons pour axes de coordonnées deux diamètres conjugués OA OB. Soient M et M′ deux points de l'ellipse, extrémités de deux autres diamètres conjugués, P et P′ les points où OM et OM′ coupent la tangente en A, parallèle au diamètre OB. D'après ce qu'on a vu précédemment, P et P′ formeront sur cette tangente une involution et l'on aura en remarquant que A est le point central, $AP \times AP' =$ constante.

Pour avoir cette constante, remarquons que si A′ est le point diamétralement opposé à A, B′ le point diamétralement opposé à B, A′B A′B′ sont deux cordes supplémentaires. Menons par O des parallèles à ces cordes, coupant en Q_1 et Q_2 la tangente en A, AQ_1 et AQ_2 seront OB et OB′ transportés parallèlement à eux-mêmes et on aura : $AQ_1 = - AQ_2 = OB$. Mais OQ_1 et OQ_2 sont deux diamètres conjugués, on a donc $AP \times AP' = AQ_1 \times AQ_2 = - OB^2$. Ainsi le produit des segments interceptés sur une tangente quelconque à partir du point de contact par deux diamètres conjugués est égal et de signe contraire au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

§ **199**. — Formules de Chasles. — Soient $OA = a$, $OB = b$, xy $x'y'$ les coordonnées des points M et M′.

On a $\frac{y}{x} = \frac{AM}{OA}$ $\frac{y'}{x'} = \frac{AM'}{OA}$

d'où $\frac{yy'}{xx'} = \frac{AM \times AM'}{OA^2} = - \frac{b^2}{a^2}$

c'est-à-dire :

(1) $$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0$$

(2) d'ailleurs on a : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, d'où en retranchant :

(3) $$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$$

Si on tire par exemple de l'équation (1) $\frac{x'}{a}$ et qu'on porte dans (3), en réduisant et ayant égard à (2) on trouve

(4) $$\frac{x}{a} = \pm \frac{y'}{b}$$

alors la relation (1) donne

(5) $$\frac{y}{b} = \mp \frac{x'}{a}$$

les relations (4) et (5) entre les coordonnées des extrémités de deux diamètres conjugués se nomment formules de Chasles.

Théorème d'Apollonius

§ **200**. — Supposons que les axes de coordonnées OX OY au lieu d'être deux diamètres conjugués quelconques, soient les axes de l'ellipse ; on aura dans ce cas

$$OM^2 = x^2 + y^2$$
$$OM'^2 = x'^2 + y'^2$$

puisque les axes de coordonnées sont rectangulaires.

$$\text{alors } OM^2 + OM'^2 = x^2 + x'^2 + y^2 + y'^2,$$

ou d'après les formules de Chasles

$$OM^2 + OM'^2 = x^2 + y^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2} = (a^2 + b^2)\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right] = a^2 + b^2$$

donc la somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des axes.

Maintenant on a :

$$xy' - yx' = \pm\left[\frac{bx^2}{a} + \frac{ay^2}{b}\right] = \pm ab\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right] = \pm ab$$

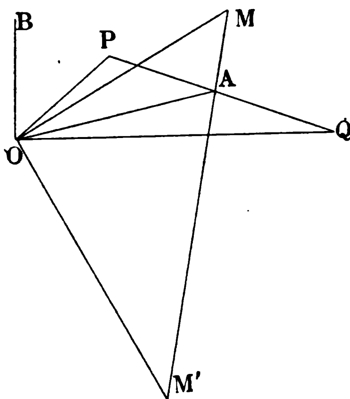
donc d'après le § **208** ci-dessous (fin de la leçon).

Le parallèlogramme construit sur deux diamètres conjugués est équivalent au rectangle construit sur les axes.

§ **201**. — *Problème.* — Connaissant en grandeur et direction deux diamètres conjugués d'une ellipse, construire les axes.

Le problème se compose de deux parties. La construction des axes en direction, et la construction des axes en grandeur.

Soient OA, OB les demi-diamètres conjugués donnés; menons par A la parallèle à OB, qui est la tangente en A à l'ellipse ; si M et M' sont les points où les axes coupent cette tangente, on doit avoir (§ 195) $AM \times AM' = - OB^2$. De là résulte que le cercle décrit sur MM' comme diamètre, doit passer par les points P et Q pris sur la perpendiculaire en A à la tangente en B, et tels que $AP = AQ = OB$. D ailleurs, l'angle MOM' étant droit, ce même cercle doit passer par O. Il est donc déterminé par les trois points O, P, Q, et l'on pourrait le construire.



Mais M étant le milieu de l'arc PMQ, OM est la bissectrice de l'angle POQ ; et OM' est la bissectrice de l'angle supplémentaire, ce qui permet de construire les points M et M'.

Soit θ l'angle AOB ; les théorèmes d'Appollonius donnent, en appelant a et b les demi-axes.

$$OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$$

$$OA \times OB \sin \theta = ab$$

d'où

$$OA^2 + OB^2 - 2 OA.OB \sin \theta = (a - b)^2$$

$$OA^2 + OB^2 + 2 OA.OB \sin \theta = (a + b^2)$$

or, l'angle PAO est le complément de θ. On a donc :

$$OP^2 = OA^2 + OB^2 - 2 OA \times OB \sin \theta$$

et de même

$$OQ^2 = OA^2 + OB^2 + 2\,OA \times OB \sin\theta$$

il résulte de là que $OP = a - b$, $OQ = a + b$, or OP et OQ sont connus, il est donc facile d'avoir a et b.

§ **202**. — Venons maintenant à certaines propriétés de *l'hyperbole*. D'après le théorème du § **184**, on sait que si deux droites AM et AN sont conjuguées par rapport à une conique C, elles le sont aussi par rapport aux deux tangentes menées du point A à la conique ; supposons que A soit le centre : ces deux tangentes deviennent alors les asymptotes ; donc si deux diamètres d'une hyperbole sont conjugués, ils sont aussi deux droites conjuguées par rapport aux symptotes.

De cette proposition résulte la conséquence suivante ; soit MN une corde d'une hyperbole coupant les asymptotes en P et Q, le milieu de MN et celui de P Q sont sur la même droite, diamètre conjugué de MN dans l'hyperbole et dans le système des deux asymptotes.

Soit H ce milieu : on a $PH = HQ$, $MH = HN$, donc $MP = QN$. *Ainsi les portions de sécantes interceptées entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égales.*

Ce théorème permet de construire l'hyperbole par points, quand on connaît un point et les deux asymptotes.

Si la droite PQ est tangente, M et N coïncident, et l'on a $MP = QM$, M est le milieu de PQ.

Donc : *La portion de la tangente comprise entre les asymptotes est divisée en deux parties égales par le point de contact.*

§ **203**. — Théorème. — Si par les deux extrémités M et N d'une corde MN, on mène des parallèles aux asymptotes, de façon à former un parallélogramme MRNS, dont MN soit l'une des diagonales, l'autre diagonale RS va passer par le centre de l'hyperbole.

En effet, dans le système des deux droites RM RN parallèles aux asymptotes, RS est le diamètre conjugué de la direction MN. Donc, dans le système des deux asymptotes elles-mêmes, ou dans l'hyperbole, le diamètre conjugué de MN est parallèle à RS, mais il doit passer par le

milieu de MN. Ce diamètre coïncide donc avec la droite RS elle-même ; donc RS est un diamètre et passe par le centre.

A l'aide de ce théorème, on construit facilement le centre d'une hyperbole connaissant trois points et les directions des asymptotes. Ce qu'on sait déjà faire du reste (§ 173).

§ **204**. — Théorème. — Dans une hyperbole, le produit des segments $OP \times OQ$, allant du centre O aux deux points P et Q où la tangente PQ coupe les deux asymptotes est constant

En effet, P et Q forment deux divisions homographiques (§ 167), d'ailleurs quand P va à l'infini, Q vient en O et inversement, parceque les deux points de contact des asymptotes avec la courbe sont à l'infini. Donc $OP \times OQ =$ constante.

§ **205**. — Théorème. — Si on prend pour axes de coordonnées les asymptotes, l'équation de l'hyperbole est $xy =$ constante.

En effet, le point de contact M de la tangente PQ étant le milieu de PQ, x est la moitié de OP, et y la moitié de OQ, xy est donc constant d'après le théorème précédent.

Ce théorème permet de construire les sommets de la courbe quand on connait les deux asymptotes et un point, on connait alors la constante, et le produit xy étant égal à cette constante, et de plus pour le sommet x étant égal à y, chacun d'eux est la racine carrée de la dite constante.

§ **206**. — La distance d'un point d'une hyperbole à son asymptote OX est proportionnelle à y, c'est-à-dire à $\frac{1}{x}$; elle devient donc aussi petite qu'on voudra, quand x grandit indéfiniment: *C'est là la définition qu'on donne le plus souvent des asymptotes.*

§ **207**. — Venons à la *parabole*. Dans une conique quelconque (190) le pôle A d'une corde PQ est sur le diamètre conjugué de PQ. Ce diamètre passe par le milieu M de PQ, et coupe la courbe en deux points conjugués par rapport à P et Q. Dans la parabole, l'un de ces points étant à l'infini, l'autre O est au milieu de AM. Si on prend ce diamètre pour

axe des x, la tangente en O [parallèle à PQ] pour axe des y, OM est l'abcisse du point M. AM est la sous-tangente, *donc la sous-tangente est double de l'abcisse.*

§ **208.** — Nous nous sommes appuyés au § **200** sur une formule donnant l'aire d'un parallélogramme OACB connaissant les coordonnées des points A et B. Nous allons démontrer cette formule, x, y étant les coordonnées de A, $x'y'$ celles de B, celles de C seront $x+x'$ $y+y'$.

Soit α la projection de A sur OX, γ celle de C on a.

Surface OABC $=$ 2 surface OAC $= 2\,(\mathrm{OC}\gamma - \mathrm{O}\,\alpha\,\mathrm{A} - \alpha\,\mathrm{A}\,\gamma\,\mathrm{C})$

$$= 2\left[\frac{(x+x')\,(y+y')}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{x'\,(y+2y')}{2}\right] = xy' - yx'$$

ce qui démontre la proposition. On verra facilement qu'elle subsiste, quelle que soit la position de la figure.

QUATORZIÈME LEÇON

Foyers et Directrices dans les Coniques

§ **209**. — *Lemme*. — Dans un quadrilatère complet ayant ses quatres côtés tangents à une conique, chaque diagonale a pour pôle le point de rencontre des deux autres.

Soit un quadrilatère complet, ABCDEF, dont les diagonales sont AB, CE, DF; appelons K et G les points oùDF coupe AB et CE. G. et K sont conjugués (§ 25) par rapport à D et F. Le faisceau AC, AD, AG, AK est donc harmonique; AC et AD étant tangentes, AG AK sont deux droites conjuguées, le pôle de AK (ou de AB) est donc sur AG. On verrait de même qu'il est sur BG; donc il est en G, ce qui démonfre la proposition.

On peut aussi démontrer ce théorème par polaires réciproques ; il se transforme dans le suivant: dans un quadrangle complet dont les quatre sommets sont sur une conique, le point de rencontre de deux diagonales est le pôle de la droite joignant les points de rencontre des côtés opposés. C'est la construction de la polaire (§ 25 et 180).

§ **210**. — Nous avons appelé points circulaires de l'infini ou points I et J, les points doubles d'une involution déterminée sur la droite de l'infini, par les côtés d'un angle droit tournant autour de son sommet. Tous les cercles passent par ces points. Nous nommerons *foyer* d'une conique un point F tel que les deux tangentes issues de ce point passent par les points I et J; la polaire du foyer se nomme *directrice.*

§ **211**. — Dans les coniques autres que la parabole, il y a quatre *foyers*: *deux réels* sur un axe; *deux imaginaires* sur l'autre. Dans la parabole, il y a un *seul foyer* situé sur l'axe.

En effet, des points I et J, on peut mener à la courbe quatre tangentes: deux T et S_1 par I, deux T_1 et S_1 par J. Si la courbe n'est pas une parabole, aucune de ces droites n'est IJ.

Il y a donc quatre foyers, les points où se coupent TT_1, SS_1, TS_1 et ST_1

Si T et T_1 sont des droites imaginaires conjuguées, il en est de même de S_1 et S_1, alors le point TT_1 est réel, ainsi que le point SS_1, les deux autres sont imaginaires.

Ces quatre tangentes forment un quadrilatère dont les quatre côtés sont tangents à la courbe, en appliquant le Lemme, on voit que la droite qui joint TT_1 à SS_1 est le polaire du point où la droite joignant les deux autres foyers coupe la droite de l'infini; le deux droites TT_1, SS_1, et TS_1, ST_1 sont donc deux diamètres conjugués; d'ailleurs ces droites coupent la droite de l'infini en deux points conjugués par rapport à I et J (§ 25); ce sont donc deux droites rectangulaires, qui sont les axes de la conique.

§ **212**. — Si la conique est une parabole S et S_1 se confondent avec la droite de l'infini; il ne reste donc que le foyer TT_1. En considérant ce cas comme cas limite du précédent, on voit que le foyer est sur un axe.

§ **213**. — *Autre définition du foyer*. — Deux droites rectangulaires quelconques FP, FQ coupent la droite IJ en deux points P et Q conjugués par rapport à I et J, pour que FI, FJ soient les tangentes à la conique issue de F, il suffira que FP, FQ soient toujours conjugués par rapport à ces tangentes (c'est-à-dire que ce soient deux droites conjuguées par rapport à la conique) dès qu'elles sont rectangulaires.

Un foyer est donc un point tel que *deux droites conjuguées passant par ce point soient toujours rectangulaires.*

§ **214**. — Ceci suffit pour démontrer d'une autre façon que les foyers se trouvent sur les axes.

En effet, en particulier, le diamètre passant par le foyer, OF doit être

perpendiculaire à sa conjuguée, c'est-à-dire à la parallèle au diamètre conjugué de OF. Ce diamètre est donc un axe.

§ **215**. — On peut déduire de cette propriété des foyers, une autre propriété fort importante.

Soit F un foyer, D la directrice correspondante ; M et M' deux points de la conique, P le point où MM' coupe D, Q le conjugué de P par rapport à MM' ; la polaire de P passe par F, puisque P est sur la polaire de F (§. 181), cette polaire est donc QF, de sorte que PF et QF sont deux droites conjuguées ; elles sont de plus rectangulaires. Elles coïncident donc avec le système des deux bissectrices des droites FM, FM' : donc d'après un théorème de géométrie élémentaire, on a

$$\frac{MQ}{M'Q} = \frac{MF}{M'F}$$

menons MH M'H' perpendiculaires sur la directrice, et la coupant en H et H', on aura $\frac{MQ}{M'Q} = \frac{MH}{M'H'}$

donc $\frac{MF}{M'F} = \frac{MH}{M'H'}$; ou encore $\frac{MF}{MH} = \frac{M'F}{M'H'}$

Ce qui montre que *le rapport des distances d'un point* M *au foyer et à la directrice est indépendant de la position de* M *sur la courbe*. Ce rapport constant se nomme *l'excentricité* Une conique est donc le lieu des points dont le rapport des distances à un foyer et à la directrice correspondante est égal à l'excentricité.

§ **216**. — Réciproquement une courbe telle que le rapport des distances de chacun de ces points à un point fixe F et à une droite fixe D est constant, est une conique de foyer F, de directrice D.

Car on peut construire une conique de foyer F, pour directrice D, pour excentricité le rapport donné. Ceci revient à donner deux tangentes (Isotropes issues de F) leurs points de contact (points où elles coupent D) et un autre point P, tel que $\frac{PF}{PD}$ = l'excentricité. Cette conique sera le lieu cherché.

Si on se reporte aux paragraphes 39 et 53, on voit que les courbes trouvées coïncident avec celles définies ci-dessus.

§ **217**. — Soient F et F′ les deux foyers réels d'une conique à centre, D et D′ les directrices. La conique ayant FF′ pour axe de symétrie, D et D′ sont symétriques par rapport à FF′; elles sont donc perpendiculaires sur FF′, elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la perpendiculaire au milieu de FF′, puisque la conique l'est. Elles sont ainsi parallèles et équidistantes du centre. De plus, à cause de la symétrie, l'excentricité est la même pour le premier et pour le second foyer. Soit M un point de la courbe, MH, MH′ ses distances aux droites D et D′, e, l'excentricité on a:

$$MF = e \times MH \qquad MF' = e \times MH'$$

Deux cas sont à distinguer selon que M est, ou n'est pas, entre deux directrices. Dans le premier cas MH + MH′ est égal à la distance δ des deux directrices. On a donc: $MF + MF' = e \times \delta$.

Ainsi MF + MF′ est constant. La courbe est une *ellipse* au sens de la géométrie élémentaire. On voit que dans ce cas e est inférieur à l'unité.

Si M n'est pas entre les deux directrices, c'est la différence MH — MH′ ou MH′ — MH (selon celle des deux directrices qui est la plus rapprochée de M) qui est égale à δ. C'est MF — MF′, ou MF′ — MF qui est constant. La courbe est une *hyperbole* au sens de la géométrie élémentaire. C'est le cas où e est supérieur à l'unité.

Dans le cas où $e = 1$ on a $MF = MH$, et la courbe est une *parabole* au sens de la géométrie élémentaire.

218. — On voit par là, que les coniques que nous étudions sont celles étudiées en géométrie élémentaire sous les noms d'ellipse, parabole, hyperbole; les foyers ont un grand nombre de propriétés démontrées en géométrie élémentaire. Quelques-unes de ces propriétés seront étudiées comme applications des théories exposées dans la leçon suivante.

QUINZIÈME LEÇON

Intersection de deux Coniques

§ **219.** — THÉORÈME I[er]. — Deux coniques ayant un point réel commun, sans avoir même tangente en ce point, ont un second point réel commun.

On peut toujours supposer, en projetant convenablement la figure, que l'une des coniques est une ellipse ou même un cercle. Soit C cette courbe, C′ l'autre, A leur point commun. Si C′ et C ne sont pas tangentes en A, C′ a des points à l'intérieur de C, d'autres à l'extérieur; la partie de C′ intérieure à C se compose d'au moins un arc de courbe dont les deux extrémités sont situées sur la courbe C. L'intersection des deux courbes se compose donc au moins de deux points réels.

Remarque : Si les courbes sont des hyperboles, l'un de ces points peut être à l'infini.

§ **220.** — THÉORÈME II. — Deux coniques qui ont deux points communs en possèdent deux autres, réels ou imaginaires.

Soient A et B les deux points communs, un rayon issu de A rencontre de nouveau la première conique en M, la seconde en M′ ; AM et BM forment deux divisions homographiques AM′ et BM′ également, BM et BM′ tous deux homographiques à AMM′ sont homographiques entre eux. Les rayons doubles de cette homographie seront les rayons pour lesquels M et M′ coïncident, et l'on sait qu'il y en a deux, réels ou imaginaires. Ce qui démontre la proposition.

Un de ces points peut coïncider avec A, le rayon homologue AM étant alors AB, on voit que les deux coniques sont tangentes en A.

Corollaire. — Dès que deux coniques ont un point réel commun, elles ont quatre points communs, dont deux peuvent être imaginaires.

En transformant par polaires réciproques, on a les propositions suivantes : 1° Deux coniques ayant une tangente commune réelle avec les deux points de contact différents, en ont une seconde ; 2° Si elles ont deux tangentes communes, elles en possèdent deux autres, réelles ou imaginaires.

§ 221. — Pour aller plus loin, nous nous servirons d'un mode de transformation des figures, que voici : C et C′ étant deux coniques non tangentes, à chaque point P nous faisons correspondre le point où se coupent les polaires de P par rapport à C et C′.

Si un point Q correspond à P, le point P correspond à Q, car si les polaires de P passent par Q, celles de Q passent par P. Si P_1 se rapproche de P, il est clair que son correspondant Q_1 se rapproche de Q. Si donc deux lignes sont tangentes, leurs correspondantes le sont aussi.

A une *droite* D qui n'a pas même pôle dans les deux coniques, correspond une *conique*. Soient en effet A et A′ les pôles de D, M un point de D, M′ son correspondant. La polaire de A passant par M celle de M passera par A, ce sera AM′ ; de même la seconde polaire sera A′M′. Ces deux droites forment deux faisceaux homographiques, car le rapport anharmonique de quatre droites AM′, celui des quatre droites A′M′ son égaux tous deux à celui des quatre points M. Le lieu de M′ est donc une conique, à moins qu'au rayon AA′ ne corresponde le rayon A′A, mais alors cette droite aurait même pôle par rapport aux deux coniques ; ce pôle serait d'ailleurs sur D.

Nous supposerons qu'il n'en est pas ainsi, notre objet étant de montrer qu'il y a toujours des points ayant même polaire par rapport aux deux coniques, il serait inutile d'aller plus loin si nous savions qu'il y en a un.

§ 222. — Considérons deux droites D et D_1, auxquelles correspondent des coniques S et S_1, soit P le point d'intersection de D et D_1 et Q son correspondant situé à la fois sur S et sur S_1. Je vais montrer que S et S_1 ne sont pas tangentes en ce point, en supposant que P n'ait pas même polaire par rapport aux deux coniques.

Si S et S_1 étaient tangentes en Q, à une sécante $Q\alpha\beta$ coupant S en α S_1 en β correspondrait une conique passant par P et par le point H situé sur D et correspondant à α, puis par le point K de D_1 correspondant à β. Quand la sécante $Q\alpha\beta$ deviendrait tangente à S et à S_1, H viendrait en P et K aussi, de sorte que la conique correspondant à $Q\alpha\beta$ serait tengente en P à la fois à D et D_1 ce qui est absurde, à moins qu'elle ne se réduise à des droites, c'est le cas écarté.

D'après le théorème premier, S et S_1 passant par Q ont un autre point réel R; si R n'avait pas même polaire dans les deux coniques, le correspondant de R serait à la fois sur D et D_1 et par suite en P, ce qui est absurde puisque R n'est pas en Q. Donc R a même polaire dans les deux coniques.

§ **223**. — Théorème. — Il existe deux autres points R_1 R_2 réels ou imaginaires, ayant même polaire dans les deux coniques; chaque sommet du triangle R R_1 R_2 a pour polaire le côté opposé (*Triangle conjugué*).

Soit T la polaire de R, sur T il y a deux points conjugués à la fois par rapport aux deux coniques, points doubles des deux divisions homographiques formées par les deux points M_1 et M_2 conjugués d'un même point M de T par rapport aux deux courbes. Soient R_1 et R_2 ces deux points; les polaires de R passant par R_1 celles de R_1 passent par R; de même les deux polaires de R_2 passent par R. Les polaires de R_1 passant par R et aussi par R_2 conjugué de R_1 coïncident toutes deux avec RR_2; de même les polaires de R_2 coïncident toutes deux avec RR_1, ce qui démontre la proposition.

Théorème. — Les points R R_1 R_2 sont sur toutes les coniques S et S_1 dont il est question ci-dessus.

En effet soit P le point où la polaire de R par exemple coupe une droite quelconque D. Les polaires de R passant par P, celles de P (qui sont distinctes) passent par R. Mais P est sur la droite D; donc R est sur la conique qui correspond à D.

Corollaire. — Les coniques correspondant à une droite quelconque D passent toutes par les points fixes R R_1 R_2.

Il n'y a pas d'autre point R_3 ayant même polaire par rapport aux deux coniques, sans quoi les coniques correspondant à deux droites D et D_1 qui se coupent en P auraient en commun cinq points R R_1 R_2 R_3 et le point Q correspondant de P, et par suite coïncideraient.

Nous avons vu que si une droite passait par l'un des points R R_1 R_2 la figure correspondante n'est plus une conique mais une droite. Celle-ci est naturellement la droite R_1 R_2.

§ **224**. — Théorème. — On peut projeter deux coniques, de façon à avoir deux coniques ayant un diamètre commun conjugué d'une même direction de cordes.

Il suffit évidemment pour cela de projeter R à l'infini. Alors la polaire de R devient ce diamètre.

Théorème. — Deux coniques quelconques ont toujours quatre points communs réels ou imaginaires. Les droites qui joignent ces points deux à deux passent par les trois points R R_1 R_2.

Je projette le point R à l'infini, alors les deux coniques ont un diamètre commun. Prenons-le pour axe des x, et la direction conjuguée pour axe des y; alors les deux coniques ont, d'après ce qu'on a vu au chapitre précédent, des équations de la forme suivante ne changeant pas quand on change y en $-y$.

$$y^2 = Ax^2 + 2Bx + C \qquad y^2 = A'x^2 + 2B'x + C'.$$

égalant les deux valeurs de y^2 on a une équation du 2° dégré en x, sauf le cas où l'on aurait $A = A'$.

Cette équation a deux racines réelles ou imaginaires $x = x'$ $x = x''$ à chacune d'elle correspond une droite parallèle à OY qui coupe évidemment les courbes aux deux mêmes points.

Si l'on avait $A = A'$ l'une de ces deux droites serait la droite de l'infini, car les coniques auraient mêmes directions asymptotiques.

On voit, en revenant à la figure primitive, que deux des cordes communes AB et CD passent par le point R. Maintenant, pour construire la polaire de R par rapport à l'une quelconque des deux coniques, joignons AC BD qui se coupent en R_1 AD, BC qui se coupent en R_2, la

polaire sera R_1 R_2 (§ 180). Si on construit de la même façon la polaire de R_1 on verra que c'est RR_2 et celle de R_2 sera RR_1. Les points RR_1 R_2 ont donc bien même polaire par rapport aux deux coniques.

En transformant cette proposition par polaires réciproques, on voit que deux coniques quelconques ont *quatre tangentes communes*, et que les droites joignant les points de rencontre des tangentes communes ont même pôle par rapport aux deux coniques. Ces droites sont donc les côtés du triangle RR_1 R_2. Ainsi les tangentes communes se coupent sur les côtés du triangle RR_1 R_2.

§ **225.** — Nous avons supposé dans ce qui précède que les coniques ne sont pas tangentes. Laissant encore de côté ce cas, et voyons de quelle nature sont les points RR_1 R_2 (réels ou imaginaires) suivant la nature des points d'intersection (ou des tangentes communes).

Nous savons que R est toujours réel. C'est donc le point de concours de deux droites A, B et C, D réelles ou imaginaires conjugués.

Si A, B et C, D sont quatre points réels, il est clair que RR_1 R_2 sont réels. Supposons A, B et C, D tous imaginaires. On peut supposer A et B conjugués, C et D conjugués. Mais alors, AB et DC sont deux droites réelles, R est réel; AD et BC sont imaginaires conjuguées elles se coupent en un point réel; R_1 est réel, de même R_2.

Supposons A et B imaginaires, C et D réels, A et B étant conjugués AB est réelle, R est encore réel, mais ici R_1 et R_2 sont imaginaires, car la conjuguée de AC est BC et non BD.

Ainsi pour que RR_1 R_2 soient tous réels, il faut que les coniques se coupent en quatre points *tous réels ou tous imaginaires*.

On peut faire une discussion analogue avec les tangentes communes, en comparant ces discussions, on voit que :

Si deux coniques se coupent en deux points réels seulement elles n'ont que deux tangentes communes réelles et réciproquement.

§ **226.** — Connaissant l'un des points RR_1 R_2 proposons-nous de construire les quatre points communs à deux coniques.

Soient ABCD les quatre points, R le point où se coupent AB et CD.

Menons une sécante coupant AB en M, CD en M', la première conique en $\alpha\alpha'$ la seconde en $\beta\beta'$. Projetons du point R ces points sur la polaire de R, on a six points PP', aa' bb'. D'après le théorème de Desargues, MM' $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$ et par suite leurs projections PP' aa' bb' sont trois couples de points correspondants d'une involution Coupons par une autre sécante, on aura six autres points, $M_1M'_1$ $\alpha_1\alpha'_1$ $\beta_1\beta'_1$ dont les projections seront PP' $a_1a'_1$ $b_1b'_1$ PP' sera donc un couple de points communs à deux involutions, on saura le construire (§ 92).

Remarquons en terminant que les points RR_1 R_2 sont les mêmes pour toutes les coniques qui passent par les quatre points A B C D. Ils forment un triangle conjugué commun à toutes ces coniques.

§ **227**. — *Coniques passant par quatre points, ou touchant quatre droites.* — Théorème premier. — Les polaires d'un point P par rapport à toutes les coniques passant par quatre points, passent par un second point fixe Q. La droite PQ est divisée harmoniquement par chacune des coniques du système. Prenons en effet le point Q où se coupent les polaires de P par rapport à deux des coniques C et C' du système. La droite PQ est divisée harmoniquement par les points $\alpha\alpha'$ où elle est coupée par C, et par les points $\beta\beta'$ où elle est coupée par C'. Donc P et Q sont les points doubles de l'involution déterminée par ces deux couples de points, et comme une 3me conique coupe PQ en deux points $\gamma\gamma'$ qui se correspondent dans cette involution, $\gamma\gamma'$ divisent aussi harmoniquement PQ, et la polaire de P relativement à cette 3me conique passe aussi par Q.

Corrélativement, les pôles d'une droite fixe par rapport à toutes les coniques touchant quatre droites sont sur une droite fixe. En particulier les centres (pôles de la droite de l'infini), sont sur une droite fixe, se nommant droite de Newton.

§ **228**. — Théorème II. — Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport à toutes les coniques passant par quatre points est une conique.

Soit en effet P un point de la droite; son correspondant Q est sur une

conique passant par les pôles de la droite par rapport à deux coniques quelconques du système. Le lieu de ces pôles est donc identique à la conique lieu du point Q.

Corrélativement, les polaires d'un point fixe par rapport à toutes les coniques tangentes à quatre droites touchent une conique fixe.

Coniques Homologiques

§ 229. — Deux faisceaux homographiques ayant pour homologiques deux faisceaux homographiques, la figure homologique d'une conique est une autre conique. Les points où l'une des coniques rencontre l'axe d'homologie étant à eux-mêmes leurs correspondants, sont sur l'autre conique. Ainsi l'axe d'homologie est une corde commune aux deux coniques.

Les tangentes menées du centre d'homologie à l'une des coniques étant aussi à elles-mêmes leurs correspondantes, touchent la seconde conique; le centre d'homologie est donc un point de rencontre de tangentes communes, ou *ombilic* des deux coniques.

Nous savons (§ 224) qu'une corde commune à deux coniques passe par l'un A des trois points ayant même polaire par rapport aux deux courbes. Il en est donc ainsi de l'axe d'homologie: de même un point de rencontre de tangentes communes est sur l'une des droites α ayant même pôle par rapport aux deux coniques. Il en est donc ainsi du centre d'homologie.

Supposons que les tangentes issues du centre d'homologie S touchent les deux coniques en PQ et P′ Q′; PQ et P′ Q′ étant homologues, se couperont sur l'axe d'homologie; commes ces droites se coupent en un point ayant même polaire par rapport aux deux coniques; elles se couperont en A, et la droite α qui passe par le centre d'homologie sera la polaire de A.

§ **230**. — Réciproquement, considérons deux coniques quelconques, et soient M et N deux de leurs points communs. Sur MN se trouve un point A ayant même polaire par rapport aux deux coniques. Sur la polaire de A se trouvent deux ombilics, soit S l'un d'eux. Les tangentes issues de S touchent la première conique C en deux points P et Q; la polaire PQ de S passe par A; de même la droite P'Q' joignant les points de conlact des tangentes avec la seconde conique C' passe par A; considérons alors l'homologique C'' de C, dans l'homologie où S est le centre, MN l'axe, P et P' deux points correspondants. Dans cette homologie, l'homologue de PQ est P'Q', l'homologue de Q est Q' dès lors C'' passe par MN P' Q', et en ces derniers points touche SP' et SQ'. Donc C'' coïncide avec C'. Ainsi C' et C sont homologiques.

Corollaire. — Si les points M et N sont à l'infini, c'est-à-dire si les coniques ont mêmes directions asymptotiques, elles sont homothétiques (voir § 48).

§ **231**. — Comme conséquence des théories exposées dans ce chapitre, nous démontrerons ici deux propriétés des foyers, en nous aidant de la considération des imaginaires. D'après le théorème du § 224, toutes les coniques passant par quatre points ont un triangle conjugué commun, et parmi ces coniques, trois se réduisent à un système de deux droites, dont les sommets du triangle conjugué sont les points de de concours. Corrélativement, toutes les coniques tangentes à quatre droites ont un triangle conjugué commun, et parmi ces coniques, trois se réduisent à un système de deux points (couples de deux points de concours des tangentes communes, corrélatifs des couples de sécantes communes) situées deux à deux sur les côtés du triangle conjugué. D'après le théorème corrélatif de celui de Desargues, les tangentes issues d'un point à une de ces coniques sont des droites en involution; les rayons doubles du faisceau divisent harmoniquement un couple de tangentes quelconques; appliquons ces propositions en supposant que parmi les couples de tangentes communes il y en ait un qui ait pour point de concours I et un qui ait pour point de concours J. Les coniques auront alors toutes les mêmes foyers. Si d'un point P on mène deux

tangentes à l'une de ces courbes, T et T'; T et T' seront deux rayons d'une involution; TI TJ en seront deux autres, puisque parmi les coniques, il y en a une se réduisant au couple de points IJ, donc les rayons doubles du faisceau divisent harmoniquement la droite IJ. Ils sont donc rectangulaires. Or si deux des rayons d'un faisceau harmonique sont rectangulaires, ils sont les bissectrices des angles des deux autres; on en conclut que les couples de tangentes issues d'un point P a toutes les coniques de mêmes foyers ont les mêmes bissectrices.

En particulier, il y a deux des coniques qui passent par P (une ellipse lieu du point M tel que $MF + MF' = PE + PF'$ et une hyperbole telle que $MF' - MF = PF' - PF$). Pour ces coniques, les tangentes issues de P sont confondues, ce sont précisément les bissectrices considérées; ces deux coniques se coupent à angle droit.

Enfin, parmi les coniques il y a celle qui se réduit à l'ensemble des deux foyers réels F et F', le couple de droites PF, PF' a donc aussi pour bissectrices les mêmes droites.

De là ces propositions.

Si d'un point P on mène des tangentes T et T' à une conique de foyers F et F' les droites T et T' et les droites PF, PF' ont mêmes bissectrices.

La tangente menée par un point P d'une conique de foyers FF' est l'une des bissectrices du système de droites PF, PF'.

SEIZIÈME LEÇON

Théorie des Surfaces du second ordre

§ **232**. — Une *surface du second ordre* est une surface coupée suivant une conique par un plan quelconque, telle est par exemple la figure homologique d'une sphère, car un plan quelconque coupe une sphère suivant un cercle (réel ou imaginaire; donc la figure homologique est une conique.

Il y a d'ailleurs d'autres surfaces du second ordre, comme nous le verrons plus loin. Parmi les coniques suivant lesquelles des plans coupent une surface de second ordre, il y en a qui se réduisent à un système de deux droites (réelles ou imaginaires), comme nous le verrons tout à l'heure.

§ **233**. — *Une surface du second ordre est coupée par une droite en deux points*, car un plan passant par la droite coupe la surface suivant une conique, que la droite rencontre en deux points. Si ces deux points sont confondus, la droite est dite tangente à la surface; dans ce cas, tout plan passant par la droite, coupera la surface suivant une conique que la droite rencontrera aussi en deux points confondus. La droite sera donc aussi tangente à cette conique.

§ **234**. Théorème. — Si la surface contient trois droites AD, AD′, AD″ passant par un même point A, cette surface est un *cone* ayant A pour sommet. — En effet, en premier lieu, ces trois droites ne sauraient être dans un même plan, ce plan pouvant couper la surface suivant deux droites, mais non trois. Menons alors par la droite AD un plan quelconque; ce plan coupant la surface suivant une première droite, doit la couper

suivant une autre droite Δ ; cette droite passe par A, sans quoi elle rencontrerait le plan D'D'' en un point qui ne peut être ni sur D' ni sur D'', (D' et D'' n'étant pas dans le plan AD. Or le plan D'D'' ne saurait couper la surface en d'autres points que ceux des droites D'D'' (sans quoi il ne couperait pas la surface suivant une conique. Il résulte de là qu'un plan quelconque passant par AD coupe la surface suivant une droite AΔ passant par A, et qui engendre un cone quand on fait varier ce plan. Le lieu est donc une cone de sommet A.

§ **235**. — Théorème. — Si la surface n'est pas un cone de sommet M, toutes les tangentes menées par le point M de la surface, sont situées dans un même plan, que l'on appelle *le plan tangent en* M. Ce plan coupe la surface suivant deux droites.

En effet, soient trois plans PQR passant par M et coupant la surface suivant trois coniques CC'C'' non décomposées en deux droites (ce qui est possible si la surface n'est pas un cone de sommet M). Soient T, et T' les tangentes en M à C et C'. Si la tangente T'' à C'' n'était pas dans le plan TT', le plan TT' couperait C'' en un point M_1 distinct de M ; alors le plan TT' couperait la surface suivant une conique tangente à T et à T' en M, ce qui est impossible si cette conique ne se réduit pas à deux droites. D'une de ces droites serait alors MM_1 ce qui est impossible puisque MM_1 est dans le plan R et que ce plan coupe la surface suivant la conique C'' qui n'est pas une droite.

Il faut donc que T'' soit dans le plan TT'. Ce plan doit couper la surface suivant une conique qui doit toucher T et T' en M ; or une conique n'admet qu'une tangente en chaque point M, sauf dans le cas où elle se compose de deux droites se coupant en M; dans ce cas, toute droite passant par M située dans le plan des deux droites, coupe la conique en deux points confondus en M. Le plan tangent coupe donc la surface suivant deux droites.

Pôle et Plan polaire

§ **236**. — Théorème. — Si par un point fixe A on mène une sécante variable coupant la surface en deux points M et N, et si B est le conjugué de A par rapport à M et N, le lieu du point B est un plan appelé plan polaire de A, A se nomme le pôle de ce plan.

Je vais démontrer que toute droite qui a deux points P et Q faisant partie du lieu, en fait partie tout entière. Le plan APQ coupe la surface suivant une conique C, la partie du lieu située dans ce plan est évidemment la polaire de A par rapport à C, et comme P et Q sont deux points du lieu, cette polaire est la droite de PQ. Le lieu étant tel qu'une droite y ayant deux points y est située tout entière, est bien un plan.

§ **237**. — Théorème. — *Si le plan polaire d'un point* A *passe par un point* B, *celui du point* B *passe par le point* A. — En effet, M et N étant les points où la droite AB rencontre la surface, dire que le plan polaire de A passe par B, c'est dire que A et B sont conjugués harmoniques par rapport à M et N; dire que le plan polaire de B passe par A, c'est dire la même chose.

Remarques. — Si M et N sont confondus (droite tangente), l'un des deux points B par exemple, est confondu avec M et N. On conclut de là que AB est une génératrice du cône ayant pour sommet A formé par les tangentes issues de A à la surface. La courbe de contact de ce cône est alors le lieu du point B; c'est l'intersection de la surface avec le plan polaire de A.

§ **238**. — Théorème. — Les plans polaires de tous les points d'une droite D passent par une même droite Δ, et les plans polaires des points de Δ passent par D, (D et Δ sont dites *droites conjuguées*). Soient P et Q deux points de D, et Δ l'intersection de leurs plans polaires,

soit M un point de Δ. Puisque les plans polaires de P et de Q passent par M, celui de M passe par P et Q (§ 237), c'est-à-dire par D. Soit M′ un point de A, puisque le plan polaire d'un point M de Δ passe par M′, celui de M′ passe par M. Ainsi le plan polaire d'un point quelconque de D passe par un point quelconque de Δ, c'est-à-dire par Δ.

Quatre plans passant par Δ *et leurs quatre pôles situés sur* D, *ont même rapport anharmonique.* — Soit en effet A un point de D, A′ le point de rencontre de D avec le plan polaire de A. A et A′ sont conjugués par rapport aux deux points où AA′ coupe la surface. Ils forment donc une involution, ce qui prouve que quatre points A, et leurs quatre homologues A′ ont même rapport anharmonique. *D'où l'on conclut la proposition énoncée.*

§ **239.** — Le plan de l'infini a un pôle, intersection des plans polaires de trois points à l'infini. (Du reste, si on prend la figure homologique, à la place du plan de l'infini, on a un plan quelconque). Toute droite passant par ce point y est divisée par la surface en deux parties égales, car si un point est à l'infini, on a vu (§ 10) que son conjugué par rapport à un segment, est le milieu de ce segment.

Ce point est le *centre* de la surface. Toutefois, si la surface est tangente au plan de l'infini, le centre est à l'infini.

Plans diamétraux et Diamètres

§ **240.** — Théorème. — Dans une surface du second ordre, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est un plan (Plan diamétral conjugué de cette direction).

En effet, si un point A à l'infini a un plan polaire P, les cordes passant par A sont toutes parallèles, et le conjugué de A par rapport aux points M et N où la corde AMN coupe la surface, est le milieu de MN. Le plan P est donc le lieu des milieux des cordes MN parallèles à la direction A.

§ **241**. — Théorème. — Tous les plans diamétraux passent par le *centre*. En effet, le point A étant à l'infini, c'est-à-dire dans le plan polaire du centre, le centre est dans le plan polaire de A, c'est-à-dire dans le plan diamétral conjugué de la direction A.

Théorème. — Si le plan diamétral conjugué de la direction A est parallèle à une droite B, le plan diamétral conjugué de B est parallèle à A. Ceci revient en effet à dire que si le plan polaire de A passe par B, celui de B passe par A.

§ **242**. — Théorème. — Dans une surface du second ordre, le lieu des centres des sections faites dans la surface par des plans parallèles à une direction donnée est une droite *(Diamètre conjugué des plans)*.

En effet, si par une droite D on fait passer un plan, il coupe la surface suivant une conique C, le pôle de D par rapport à C est sur la droite Δ conjuguée de D. Si on suppose que D est à l'infini, tous les plans passant par D sont parallèles, le pôle de D devient le centre de C, et Δ est le lieu des centres des coniques C dont les plans sont tous parallèles. Le théorème est donc démontré.

§ **243**. — Théorème. — Si une droite D est parallèle à un plan P, le plan diamétral conjugué de D passe par le diamètre conjugué de P. En effet, soit C le centre d'une section faite par un plan P_1 parallèle à P, toutes les droites menées dans P_1 par C seront divisées par la surface en deux parties égales, il en sera ainsi par conséquent de la droite menée par C parallèlement à D, car cette droite étant parallèle à P sera dans P_1. Donc C sera un point du plan diamétral conjugué de D (*ce qu'il fallait démontrer*).

§ **244**. — Conique a l'infini. — Le plan de l'infini, comme tout autre plan, coupe la surface suivant une conique. On peut ramener cette conique à distance finie par une transformation homologique ou plus simplement en considérant le cône obtenu en joignant tous ces points à un point fixe à distance finie, et coupant ce cône par un plan quel-

conque. Cela équivaut, somme toute, à une transformation homologique.

Si A est un point à l'infini, P le plan diamétral conjugué de A (ou un plan parallèle), P est le plan polaire de A (ou un plan qui coupe le plan de l'infini suivant la même droite que ce plan polaire). La droite D suivant laquelle P coupe le plan de l'infini, sera la polaire de A par rapport à la conique à l'infini de la surface. (Il est bien clair, en effet, que si par un point A on mène un plan qui coupe la surface suivant une courbe C, le plan polaire de A coupe ce plan suivant la polaire de A par rapport à la courbe C).

Quand le centre de la surface est à l'infini, le plan de l'infini coupe la surface suivant deux droites, la conique à l'infini se réduit ici à deux droites.

§ **245**. — Systèmes de diamètres conjugués. — Supposons que le centre ne soit pas à l'infini. La conique C à l'infini ne se réduit pas à deux droites, menons par le centre O une droite OA, coupant le plan de l'infini en A. Prenons sur la polaire de A un point quelconque B, la polaire de B passera par A et coupera en D la polaire BD de A. La polaire de D passera alors par A et B. Le triangle ABD sera conjugué par rapport à C, chaque côté étant la polaire du sommet opposé.

Alors dans le trièdre OABD chaque face sera le plan diamétral conjugué de l'arête opposée. Les arêtes de ce trièdre forment alors ce qu'on nomme un système de trois diamètres conjugués. On voit qu'il existe une infinité de pareils systèmes, puisque A est un point arbitraire à l'infini, et AB une droite quelconque passant par A et située dans le plan de l'infini.

§ **246**. — On voit très facilement que si la surface est une sphère, trois diamètres conjugués sont trois diamètres rectangulaires deux à deux. Car dans une sphère, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée, est un plan perpendiculaire à cette direction et passant par le centre de la sphère.

La sphère coupe le plan de l'infini suivant le cercle de l'infini ; donc

un plan et une droite perpendiculaire rencontrent le plan de l'infini en une droite et un point qui sont polaire et pôle par rapport au cercle de l'infini. On a déjà vu cette proposition (§ 152). *Trois droites rectangulaires deux à deux donnent de même dans le plan de l'infini un triangle conjugué par rapport au cercle de l'infini.*

Plans principaux et Axes

§ **247**. — Proposons-nous de chercher les plans de symétrie d'une surface de second ordre, c'est-à-dire les plans qui divisent en deux parties égales les cordes qui leur sont perpendiculaires.

Avant d'aborder le problème, nous ferons d'abord les remarques suivantes :

Nous avons vu (§ 223), que deux coniques qui ne sont pas tangentes, ont toujours un triangle conjugué commun. Notre démonstration repose sur la considération de la conique qui correspond à une droite donnée. On peut remarquer qu'il n'y a rien à changer dans le raisonnement si l'une des deux coniques données, ou même les deux sont imaginaires, la polaire d'un point réel par rapport à une telle conique restant réelle. Nous avons vu, si les deux coniques données se coupent en quatre points imaginaires, que les sommets du triangle conjugué commun sont tous réels ; ceci a lieu en particulier quand une des deux coniques données est imaginaire.

§ **248**. — Considérons le cas où l'une des deux coniques est remplacée par un système de deux droites. Dans ce cas, le triangle conjugué commun sera remplacé par le triangle ayant un de ses sommets en A point de rencontre des deux droites ; les deux autres sommets B et C sont sur la polaire de A, et conjugués à la fois par rapport au système de deux droites et à la conique. Si cette conique est imaginaire, B et C sont réels, car ce sont les points correspondants communs à

deux involutions, et les points doubles de l'une d'elles sont imaginaires (§ 192).

§ **249**. — Considérons encore le cas où les coniques sont *bitangentes*, que l'une d'elles soit ou non un système de deux droites. La corde des contacts a alors même pôle A dans les deux coniques; le point A, et deux points conjugués sur la corde des contacts forment un triangle conjugué commun. On voit que dans ce cas, *il y a une infinité de pareils triangles.*

§ **250**. — Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème proposé. Si un plan est *principal*, c'est un plan diamétral conjugué de la même direction de cordes dans la surface et aussi dans une sphère quelconque ayant son centre dans ce plan. Il coupe donc le plan de l'infini suivant une droite ayant même pôle par rapport aux deux coniques suivant lesquelles la surface donnée et la sphère rencontrent le plan de l'infini, c'est-à-dire à la conique Σ à l'infini sur la surface, et au cercle S de l'infini. Ce dernier étant une conique imaginaire, on voit qu'il y a trois droites réelles répondant à cette condition, les trois côtés du triangle conjugué commun à S et à Σ. Soit ABC ce triangle.

§ **251**. — Si Σ ne se réduit pas à un système de deux droites, le plan de l'infini n'est pas tangent à la surface. Le centre O pôle de ce plan, est alors à distance finie. Les plans OAB OAC OBC sont des plans principaux, OA, OB, OC sont des axes de symétrie.

§ **252**. — Si Σ se réduit à deux droites se coupant en A, nous avons encore (§ 248) un triangle conjugué ABC dont un des sommets est en A. La droite conjuguée de BC passe par A. Soit Δ cette droite. Les plans ΔAB, ΔAC sont alors des plans principaux, et la droite Δ est un axe de symétrie, c'est le seul. On obtient facilement cet axe de symétrie en remarquant que dans ce cas tous les diamètres passent par A et par

suite sont parallèles, l'axe est le lieu des centres des sections faites dans la surface par les plans perpendiculaires à la direction A.

§ **253**. — Si les coniques S et Σ étaient tangentes, elles seraient bitangentes (car si une conique en touche une autre en un point imaginaire. elle le touche aussi en son conjugué). Soit A le pôle de la corde des contacts, D cette corde, Δ la droite conjuguée de D passant par A, tous les plans passant par D seront perpendiculaires à Δ, comme ils passent tous par les points de contact de S et Σ, ils coupent la surface suivant des coniques passant par les points circulaires de leur plan, c'est-à-dire suivant des cercles, le centre de l'un de ces cercles est sur le diamètre Δ. La surface est donc de *révolution* autour de la droite Δ.

§ **254**. — *Recherche des plans principaux par des constructions réelles.*

Les raisonnements précédents prouvent bien l'existence des plans principaux ; ils ne permettent pas d'en donner une construction immédiate. Pour y parvenir, nous allons raisonner d'une autre façon. Nous allons nous borner aux surfaces à centre qui ne sont pas de révolution, car dans le cas des surfaces tangentes au plan de l'infini, et dans le cas des surfaces de révolution, la construction directe est facile.

§ **255**. — Soit donc O le centre de la surface; par le point O menons une droite quelconque OM, soit OM′ l'intersection du plan perpendiculaire à OM mené par O avec le plan diamétral conjugué de OM. A chaque droite OM correspond ainsi une droite OM′.

Cette correspondance (tout à fait analogue du reste à celle du § **221**), est réciproque. En effet, l'angle MOM′ étant droit, OM est dans le plan mené par O perpendiculairement à OM′, de plus OM′ étant dans le plan diamétral conjugué de OM, OM est dans le plan diamétral conjugué de OM′. OM est donc bien la droite correspondante de OM′.

Quand la droite OM décrit un plan passant par O, la droite OM′ décrit un cône du second ordre. En effet, soit OP la perpendiculaire au plan ω donné, et OQ le diamètre conjugué de ω. Si OM reste dans le plan ω, le plan diamétral conjugué de OM passe par OQ (§ 237) et le plan perpendiculaire à OM passe par OP, de plus le rapport anharmonique des quatre droites OM est égal à celui des quatre points où elles percent le plan de l'infini, ou à celui des quatre plans polaires de ces quatre points, c'est-à-dire des quatre plans diamétraux QOM′ ; le rapport anharmonique des quatre droites OM est évidemment égal à celui des quatre plans perpendiculaires POM′, donc quatre plans QOM′ ont même rapport anharmonique que quatre plans POM′ correspondants. Si l'on coupe par un plan quelconque, on obtiendra deux faisceaux homographiques PM′, QM′ ; donc ce plan coupera le lieu de OM′ suivant une conique. M′ décrit donc un cône du deuxième ordre.

§ **256**. — Considérons deux plans ω et ω_1, à ces deux plans correspondent deux cônes σ et σ_1 qui passent tous les deux par la droite qui correspond à l'intersection de ω et ω_1. On verra, comme au § 222, qu'ils ne sont pas tangents suivant cette droite. (On ramène les raisonnements sur ces cônes à des raisonnements sur des coniques en coupant la figure par un plan quelconque.)

Ils se coupent alors suivant trois autres droites dont l'une au moins est réelle. Soit OA cette droite. Le plan diamétral conjugué de OA coïncidera avec le plan perpendiculaire sur OA. Car si ces plans ne coïncidaient pas, ils se couperaient suivant une droite OA′ qui serait la correspondante de OA et qui, par suite, coïnciderait avec l'intersection de ω et ω_1. Or à l'intersection de ω et de ω_1 correspond par hypothèse une droite autre que OA.

Le plan diamétral conjugué de OA étant perpendiculaire sur OA, considérons les deux axes OB, OC de la conique intersection de la surface par ce plan, on voit facilement que le plan diamétral conjugué de OB est le plan COA qui est perpendiculaire sur OB. De même le plan diamétral conjugué de OC est le plan BOA, perpendiculaire sur OC. On voit donc que OA OB OC *sont les axes*, et l'on démontrera

facilement que les deux cônes dont il est question ci-dessus, se coupent suivant ces trois axes, en sorte qu'ils se coupent suivant *quatre droites réelles.*

Nous ne discuterons pas ici les particularités qui peuvent se présenter, ce que nous disons ici étant absolument analogue à ce que nous avons dit au § 222.

Sections circulaires.

§ 257. — Nous allons chercher les plans qui coupent la surface du second degré donnée suivant des cercles. Nous supposerons que la surface ne soit pas de révolution, en sorte que le plan de l'infini ne la la coupe pas suivant une conique bitangente au cercle de l'infini.

§ 258. — Remarquons en passant le théorème suivant, dont la démonstration est immédiate.

Les sections d'une surface du second degré par des plans parallèles, sont des courbes homothétiques.

En effet, des plans parallèles coupent le plan de l'infini suivant une même droite. Cette droite coupe la conique à l'infini de la surface en deux points, les courbes dont il est question passent toutes par ces deux points. Ayant deux points communs à l'infini, elles sont homothétiques.

La question proposée est facile à résoudre; pour que la section par un plan soit un cercle, il faut qu'elle passe par les deux points où ce plan rencontre le cercle de l'infini ; or la surface a quatre points α_1 α_2 α_3 α_4 sur le cercle de l'infini. Les sections cherchées sont donc situées dans les plans passant par l'une des six droites $\alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_1 \alpha_3$, $\alpha_1 \alpha_4$, $\alpha_2 \alpha_3$, $\alpha_2 \alpha_4$ $\alpha_3 \alpha_4$.

Parmi ces six droites, deux seulement sont réelles, si α_1 et α_2 sont imaginaires conjuguées, de même que α_3 et α_4, ces deux droites sont $\alpha_1 \alpha_2$ et $\alpha_3 \alpha_4$.

§ **259**. — Il y a donc seulement deux directions de sections circulaires réelles, ce sont celles passant par α_1 α_2 et celles passant par α_3 α_4. Il est facile de voir comment sont placés ces plans ; soit A le point où se coupent α_1 α_2 et α_3 α_4. La direction A est celle d'une corde perpendiculaire à un plan principal, puisque c'est l'un des points ABC du § 250 ; ainsi les plans de sections circulaires sont perpendiculaires aux plans principaux ; les plans de sections circulaires réelles sont perpendiculaires à un même plan principal.

§ **260**. — Il y a un cas où les plans de sections circulaires ne coupent pas réellement la surface suivant des cercles, c'est celui où la surface coupe le plan de l'infini suivant les deux droits réelles α_1 α_2, et α_3 α_4. Dans ce cas, tout plan passant par une de ces droites, coupe la surface suivant une seconde droite, et non suivant un cercle.

§ **261**. — *Théorème*. — Deux cercles réels, non situés dans des plans parallèles (l'un passant par α_1 α_2 et l'autre par α_3 α_4) sont situés sur une même sphère.

En effet, soit P et Q les plans de ces deux cercles ; ils se coupent suivant une droite D qui coupe elle-même la surface en deux points M et N. Faisons passer une sphère par le premier cercle et un point A du second, je dis que cette sphère contient le second cercle. En effet, le plan Q coupe la sphère suivant un cercle passant par A M et N, et ayant par conséquent trois points communs avec ce second cercle ; ces deux cercles ayant trois points communs, coïncident.

DIX-SEPTIÈME LEÇON

ÉTUDE DES SURFACES RÉGLÉES DU DEUXIÈME ORDRE

Théorème général sur les Surfaces réglées

§ **262**. — On nomme surface *réglée* la surface engendrée par une droite qui se déplace d'après une loi déterminée. Cette droite se nomme *génératrice.*

Considérons une génératrice D de la surface, et un point M sur D, Traçons sur la surface deux courbes, C et C_1 passant par M, et soient M′ et M″ les deux points où elles sont coupées par une seconde génératrice D_1 voisine de D. Quand D_1 se rapprochera de D, M′ et M″ se rapprocheront de M, MM′ et MM″ deviendront les deux tangentes en M aux deux courbes C et C_1 le plan M M′M″ deviendra le plan de ces deux tangentes et puisque le plan MM′M″ contient M′ M″ ou D_1, le plan des deux tangentes contiendra la position limite de D_1 c'est-à-dire D ; ainsi toutes les tangentes à la surface en M seront dans un même plan contenant D. Ce théorème comporte des cas d'exception ; car la démonstration suppose qu'une seule droite D_1 vienne en D, et que par M il ne passe pas plusieurs génératrices.

§ **263**. — L'existence du *plan tangent* étant ainsi démontrée, on distinguera deux classes de surfaces réglées : d'abord celles dans lesquelles le plan tangent reste le même en tous les points d'une génératrice. On leur a donné le nom de surfaces *développables* ; tels sont les cônes, les cylindres, etc. Laissant de côté ces surfaces, nous allons démontrer relativement aux autres, cette proposition. *Le rapport anharmonique de quatre plans tangents en quatre points d'une même génératrice est égal à celui des quatre points de contact.*

Soient $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ les quatre plans tangents aux quatre points ABCD d'une même génératrice L ; considérons sur la surface quatre courbes passant respectivement par ABCD, et coupées en $A_1B_1C_1D_1$ par une génératrice L_1 voisine de L, désignant par la notation LA_1 le plan qui passe par L et par A_1 on aura (§ 19 ou 129)

$$L\,(A_1B_1C_1D_1) = A_1B_1C_1D_1$$

Si L_1 vient se confondre à L, $A_1B_1C_1D_1$ viennent en ABCD et d'autre part les plans LA_1 LB_1 LC_1 LD_1 deviennent les plans tangents $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$; on a donc

$$(\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta) = (ABCD).$$ *Ce qu'il fallait démontrer.*

§ **264**. — Ce théorème va nous permettre d'étudier très simplement la variation du plan tangent quand le point de contact parcourt une génératrice de la surface.

A cet effet, prenons sur la droite une origine, que je supposerai d'abord arbitraire, et un plan arbitraire passant par la génératrice. J'appellerai OX la droite, XOY le plan arbitraire, OY dans ce plan sera perpendiculaire à OX, et OZ sera perpendiculaire au plan XOY. Prenons sur OY un segment $O\omega = 1$, puis par le point ω menons une parallèle à OZ, soit $\omega\xi$ cette parallèle, si un plan P passant par OX, fait avec le plan XOY l'angle θ, il coupera $\omega\xi$ en un point μ tel que $\mu\omega = tg\,\theta$.

Soit M un point d'abcisse x pris sur OX, μ le point où le plan tangent en M coupe $\omega\,\xi$, θ l'angle que fait ce plan avec XOY. D'après ce qui précède M et μ formeront deux divisions homographiques ; on aura donc entre x et $tg\theta$ une relation de la forme

$$A\,x\,tg\theta + Bx + C\,tg\theta + D = 0$$

pour x infini $tg\,\theta$ a une certaine valeur, choisissons le plan XOY de façon que pour x infini θ soit droit, ou $tg\,\theta$ infini, on aura alors $A = 0$. De plus, choisissons pour origine le point qui correspond à la valeur 0 pour $tg\,\theta$, la relation précédente se réduit alors à

$$Bx + C\, tg\, \theta = 0$$

ou en posant $-\frac{C}{B} = p$

$$x = p\, tg\, \theta$$

On voit que x variant de $-\infty$ à $+\infty$ θ varie de -1 droit à $+1$ droit le plan tangent fait un tour complet, en tournant toujours dans le même sens, quand le point de contact décrit la génératrice.

La constante p se nomme le *paramètre de distribution*. Le point que nous avons pris comme origine se nomme le *point central*, le plan tangent en ce point est le *plan central*. Pour chaque génératrice de la surface réglée, il y a un paramètre de distribution, un point et un plan centraux.

§ **265**. — Avant d'étudier les surfaces du deuxième ordre engendrées par des droites, nous démontrerons encore la proposition suivante, cas particulier d'autres plus générales qui feront l'objet de leçons ultérieures.

Si un quadrilatère gauche, dont les côtés successifs sont AB, BC, CD, DA est coupé par un plan P qui coupe AB en α, BC en β, CD en γ, DA en δ, on a (en grandeur et signe) la relation

$$(1) \qquad \frac{A\alpha}{\alpha B} \times \frac{B\beta}{\beta C} \times \frac{C\gamma}{\gamma D} \times \frac{C\delta}{\delta A} = +1$$

Projetons toute la figure sur une droite quelconque parallèlement au plan P, A, BCD se projetteront en quatre points $abcd$, les points $\alpha\beta\gamma\delta$ se projetteront tous au même point H où le plan P rencontre l'axe de projection ; et l'on aura (en grandeur et signe), d'après un théorème dont nous avons fait souvent usage :

$$\frac{A\alpha}{\alpha B} = \frac{aH}{Hb} ; \frac{B\beta}{\beta C} = \frac{bH}{Hc} ; \frac{C\gamma}{\gamma D} = \frac{cH}{Hd} ; \frac{D\delta}{\delta A} = \frac{dH}{Ha}$$

d'où, en multipliant membre à membre, et remarquant que dans le second membre, à chaque facteur du numérateur correspond au dénominateur le facteur égal et de signe contraire :

$$(^1) \qquad \frac{A\alpha}{\alpha B} \times \frac{B\beta}{\beta C} \times \frac{C\gamma}{\gamma D} \times \frac{D\delta}{\delta A} = +1.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

§ **266**. — *Réciproquement*, si entre quatre points $\alpha\beta\gamma\delta$ situés respectivement sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère gauche, on a la relation précédente, ces quatre points sont dans un même plan. En effet, considérons le plan P qui passe par les trois points $\alpha\beta\gamma$, ce plan rencontre la droite DA en un point δ', et les quatre points $\alpha\beta\gamma\delta'$ étant ainsi dans un même plan, on a, d'après le théorème précédent:

$$(^2) \qquad \frac{A\alpha}{\alpha B} \times \frac{B\beta}{\beta C} \times \frac{C\gamma}{\gamma D} \times \frac{D\delta'}{\delta' A} = +1,$$

d'où en comparant cette égalité a l'égalité (1) qui a lieu par hypothèse :

$$\frac{D\delta'}{\delta' A} = \frac{D\delta}{\delta A}$$

d'où l'on conclut que δ et δ' coïncident, car il n'y a qu'un point qui divise le segment DA dans un rapport donné en grandeur et signe. Le point δ coïncidant avec δ' est donc bien dans le plan $\alpha\beta\gamma$ (*ce qu'il fallait démontrer*).

Surfaces réglées du deuxième ordre

§ **267**. — 1° Si une surface du deuxième ordre contient une droite réelle, elle en contient une infinité; par chaque point de la surface il en passe deux.

En effet, soit D une droite réelle sur la surface, P un point quelconque de cette surface, le plan DP doit couper la surface suivant une conique, mais cette conique doit se composer de la droite D, et d'une autre droite, cette autre droite doit passer par P, qui est un point d'intersection de la surface et du plan. Soit Δ cette autre droite, située dans un même plan avec D.

Considérons maintenant un point quelconque M de la surface. Ce point n'est pas dans le plan DΔ, car ce dernier plan ne peut couper la surface en aucun point en dehors des droites D, Δ dont l'ensemble constitue une conique, les plans DM et ΔM coupent alors, d'après le raisonnement précédent la surface suivant une droite passant par M. pour chacun d'eux. Cela fait deux droites passant par M. Ces deux droites ne peuvent coïncider que si elles passent par le point de rencontre de D et Δ. Mais dans ce dernier cas il passerait par ce point trois droites de la surface non situées dans un même plan. Nous avons vu (§ 234), qu'une telle surface serait un cône ayant ce point pour sommet. En écartant ce cas, on voit que par tout point M de la surface, il passe deux droites distinctes, l'une rencontrant D, l'autre Δ. Nous appellerons les premières (droites du premier système) les autres (droites du deuxième système).

§ 268. — 2° *Deux droites de même système ne sont jamais dans un même plan.*

En effet, si deux droites de même système étaient dans un même plan, ce plan contiendrait D qui est rencontré par ces deux droites; il couperait donc la surface du deuxième ordre suivant trois droites, ce qui est impossible.

§ 269. — 3° *Deux droites de système différent sont toujours dans un même plan.*

En effet, considérons une droite K du premier système et une droite K' du second, rencontrant Δ en A. Le plan KA doit couper la surface suivant une seconde droite passant par A, cette droite ne saurait être Δ, car le plan KΔ contiendrait la droite D, et par suite couperait la surface du second ordre suivant trois droites ; puisque cette droite n'est pas Δ, c'est nécessairement K', donc K et K' sont dans un même plan (*ce qu'il fallait démontrer*).

§ 270. — 4° *Les deux points* M *et* M' *où une droite variable du premier système rencontre deux droites* D *et* D' *du second système, for-*

ment sur ces deux droites, deux divisions homographiques, les plans DM' *et* D'M *qui se coupent suivant* MM' *forment deux faisceaux homographiques de plans.*

Coupons la surface par un plan quelconque qui coupe D en A. D' en B, MM' en P ; le plan considéré coupe par hypothèse, la surface suivant une conique. P est un point quelconque de cette conique. AP BP forment donc deux faisceaux homographiques, donc il en est ainsi des plans DAP, D'BP, ou DM' et D'M ; ces plans déterminent alors sur D' et D les points M' et M, correspondants de deux divisions homographiques.

§ **271**. — 5° *Réciproquement,* la droite d'intersection de deux faisceaux homographiques de plans. ou la droite joignant deux points correspondants de deux divisions homographiques sur deux droites non situées dans un même plan, est une surface du second ordre. Soient D et D' deux droites, supposons qu'un plan passant par D coupe D' en M', et qu'un plan passant par D' coupe D en M. Si les plans DM' et D'M forment deux faisceaux homographiques, il est clair que les points M et M' formeront sur D et D' deux divisions homographiques et inversement. Les deux modes de génération cités dans l'énoncé s'équivalent donc. Si maintenant on coupe la figure par un plan qui coupe D en A, D' en B, MM' en P, le fait que les plans DM' D'M forment deux faisceaux homographiques, entraîne que leurs sections AP BP par le plan forment aussi deux faisceaux homographiques. Donc la section de la surface par le plan considéré est une conique qui passe par A et B. La proposition est donc démontrée.

§ **272**. — 6° *La surface engendrée par une droite qui rencontre trois droites fixes non situées dans un même plan, est une surface du deuxième ordre.*

Soient en effet D D' D'' les trois droites fixes, M_1 M_2 M_3 M_4 quatre points sur D'' le plan DM_1 et le plan D'M_1 se coupent évidemmment suivant une droite rencontrant D D' et D''. Or on a :

$$D\,(M_1\,M_2\,M_3\,M_4) = (M_1\,M_2\,M_3\,M_4)$$

$$D'\,(M_1\,M_2\,M_3\,M_4) = (M_1\,M_2\,M_3\,M_4)$$

d'où $$D\,(M_1\,M_2\,M_3\,M_4) = D'\,(M_1\,M_2\,M_3\,M_4).$$

d'où il résulte que DM et D'M forment deux faisceaux homographiques de plans. Leur intersection engendre donc, d'après le théorème précédent, une surface du second ordre.

§ **273**. — *Surfaces du second ordre passant par un même quadrilatère gauche.* — Considérons une surface du second ordre engendrée par une droite $\alpha\gamma$ rencontrant les deux côtés AB et CD d'un quadrilatère gauche ABCD en α et γ respectivement. Supposons que BC et DA soient deux positions particulières de cette droite, en sorte que le quadrilatère gauche considéré soit situé sur la surface, α et γ forment deux divisions homographiques dont A et D, B et C sont des points correspondants. Si α' et γ' sont deux autres points correspondants, on aura :

$$(AB\,\alpha\alpha') = (DC\,\gamma\gamma')$$

ou : $$\frac{A\alpha}{\alpha B} : \frac{A\alpha'}{\alpha' B} = \frac{D\gamma}{\gamma C} : \frac{D\gamma'}{\gamma' C}$$ ou : $$\frac{A\alpha}{\alpha B} \times \frac{C\gamma}{\gamma D} = \frac{A\alpha'}{\alpha' B} \times \frac{C\gamma'}{\gamma' D}$$

ou encore en remarquant que le second membre est indépendant de α et γ.

(1) $$\frac{A\alpha}{\alpha B} \times \frac{C\gamma}{\gamma D} = k$$

k désignant une constante.

Soit $\beta\,\delta$ une génératrice du second système qui coupe BC en β, AD en δ et $\alpha\gamma$ en M. Les deux génératrices étant dans un même plan on aura :

(2) $$\frac{A\alpha}{\alpha B} \times \frac{B\beta}{\beta C} \times \frac{C\gamma}{\gamma D} \times \frac{D\delta}{\delta A} = 1$$

et en ayant égard à la relation (1) ci-dessus :

(3) $$\frac{B\beta}{\beta C} \times \frac{D\delta}{\delta A} = \frac{1}{k}$$

Les droites $\alpha\beta$ satisfaisant à la relation (1) sont les génératrices du premier système. Les droites $\beta\delta$ satisfaisant à la relation (2) sont celles du second système.

§ **274**. — Théorème. — Si trois génératrices d'un même système sont parallèles à un même plan, toutes les génératrices de ce système sont parallèles à ce plan, et toutes celles de l'autre système sont parallèles à un autre plan.

Reprenons la figure précédente : Les portions de droites comprises entre plans parallèles étant proportionnelles, si AD, $\alpha\gamma$ et BC sont parallèles à un même plan, on aura :

$$\frac{A\,\alpha}{\alpha\,B} = \frac{D\,\gamma}{\gamma\,C} \quad \text{(En grandeur et signe)}$$

ou $$\frac{A\,\alpha}{\alpha\,B} \times \frac{C\,\gamma}{\gamma\,D} = 1$$

Mais quand $\alpha\gamma$ engendre la surface, nous avons vu que le premier membre restait constant. Si donc il est égal à 1 pour une seule position de $\alpha\gamma$, il est égal à 1 pour toutes, et alors toutes les génératrices $\alpha\gamma$ sont parallèles à un même plan, ce qui démontre la première partie du théorème.

La constante k étant ici égale à 1, on a :

$$\frac{B\,\beta}{\beta\,C} \times \frac{D\,\delta}{\delta\,A} = 1$$

ce qui prouve encore que AB, $\delta\beta$ et DC sont parallèles à un même plan et démontre la deuxième partie du théorème.

Ces surfaces particulières dont toutes les génératrices sont parallèles à deux plans fixes se nomment des *paraboloïdes*. On voit facilement que la relation

$$\frac{A\alpha}{\alpha B} = \frac{D\gamma}{\gamma C}$$

définit deux divisions homographiques semblables, si α est à l'infini, γ est à l'infini. Il résulte de là que ces surfaces (et elles seules) sont tangentes au plan de l'infini.

Par un quadrilatère gauche il passe une infinité de surfaces du second ordre (une pour chaque valeur de k) ; il n'y a, parmi elles, qu'un seul paraboloïde correspondant à la valeur $k = 1$.

§ **275**. — Intersection d'une droite et d'une surface réglée du second ordre. — Considérons une droite Δ, et une surface réglée engendrée par une droite rencontrant trois droites fixes D D′ D″. Je me propose de chercher les points où la droite Δ rencontre la surface. Un de ces points est un point M tel qu'une droite passant par ce point rencontre D D′ D″; le problème revient donc à trouver une droite rencontrant les quatre droites données Δ D D′ D″. Considérons les deux surfaces définies par les trois droites Δ D D′ et par les trois droites Δ D D″. Soit A un point de D, par ce point passe une génératrice de la surface Δ D D′, coupant Δ en m, et D′ en a' ; par A passe aussi une génératrice de Δ D D″ coupant Δ en m' et D″ en a''. D'après ce qu'on a vu ci-dessus (§ 270) m et A forment deux divisions homographiques, de même que m' et A. Donc m et m' forment deux divisions homographiques : Pour que m soit un des points cherchés, il faut que m A et m'A coïncident, c'est-à-dire que m soit un des points doubles des deux divisions. Par conséquent, après avoir au préalable construit trois couples de points correspondants, on sera ramené à construire les points doubles d'après la méthode du § 88.

§ **276**. — Il résulte de cette construction, le théorème suivant que nous retrouverons plus loin : *Deux surfaces du second ordre ayant en commun deux droites ne se rencontrant pas ont en commun deux autres droites rencontrant les deux premières et formant par suite avec elles un quadrilatère gauche.*

En effet, nous avons eu dans le problème précédent, les deux surfaces Δ D.D′, Δ D D″, ayant en commun Δ et D, et nous avons construit deux droites rencontrant Δ, D, D′ D″ et situées sur les deux surfaces. Ces droites pourraient d'ailleurs être imaginaires ou confondues ; l'une d'elles pourrait être à l'infini.

DIX-HUITIÈME LEÇON

Sur les Polaires réciproques

§ **277.** — Nous avons défini aux § 44 et suivants, les figures polaires réciproques par rapport à une sphère. On peut aussi prendre des figures polaires réciproques par rapport à une surface du second degré. L'étude de ce mode de correspondance fera l'objet de cette courte leçon.

Considérons une surface du second ordre R, que nous nommerons surface de référence. A chaque point M d'une figure F nous ferons correspondre son plan polaire μ par rapport à la surface R. Nous dirons que μ est le plan corrélatif de M. Les plans corrélatifs des différents points de la figure F forment une figure F', qu'on nommera figure corrélative de F.

§ **278** Théorème. — La figure corrélative de l'ensemble des points d'un plan P est l'ensemble des plans passant par le pôle ω du plan P.

En effet, si M est un point du plan P polaire de ω par rapport à R, le plan polaire de ω passant par M, le plan polaire μ de M passera par ω (§ 237).

§ **279.** — Théorème. — La figure corrélative de l'ensemble des points d'une droite D est l'ensemble des plans passant par la conjuguée Δ de D par rapport à R.

On sait en effet que les plans polaires des différents points de D passent tous par Δ (§ 233).

§ **280**. — Théorème. — Si le lieu des pôles des plans tangents à une surface S est une surface Σ, le lieu des pôles des plans tangents à Σ est la surface S. Les deux surfaces S et Σ sont dites polaires réciproques; les plans tangents à l'une d'elles forment la figure corrélative des points de l'autre.

Soient en effet a b c trois points de S, et ABC les plans tangents en ces trois points se coupant en M; $\alpha\beta\gamma$ les pôles de ABC situés sur Σ; de ce que les plans ABC polaires de $\alpha\beta\gamma$ passent par M, il résulte que le plan polaire de M passe par $\alpha\beta\gamma$, c'est donc le plan de ces trois points.

Si b et c se rapprochent de A en suivant deux lignes sur S n'ayant pas même tangente en A, M aura pour position limite le point A, le plan polaire de M aura pour position limite le plan polaire de A, β et γ se rapprocheront de α (en suivant deux lignes non tengentes en α), et le plan limite de $\alpha\beta\gamma$ sera le plan tangent en α. Ce plan tangent est donc bien le plan polaire de M, ce qui démontre la proposition.

On peut ajouter que si une droite D touche S, sa conjuguée Δ par rapport à R touche Σ. Car si D est la limite d'une droite a b coupant S en a et b, quand b vient se confondre avec a, Δ sera la limite de l'intersection des plans polaires de a et de b, quand le second de ces plans se confond avec le premier.

§ **281**. — Il convient d'examiner quelle est la figure corrélative d'une courbe C, intersection de deux surface S et S'. Les corrélatifs des points de C sont évidemment des plans tangents à la fois aux deux surfaces Σ et Σ' polaires réciproques de S et de S'.

A une droite D tangente à C correspond sa conjuguée Δ qui, lorsque D se déplace, engendre une surface réglée Γ; D est la limite d'une corde a b de C quand b vient se confondre avec A, Δ est la limite de l'intersection des deux plans polaires de a et de b, c'est-à-dire de deux plans tangents communs α et β à Σ et Σ', quand β vient se confondre avec α, c'est donc l'enveloppe de ces plans.

A un plan passant par D correspond un point sur Δ, c'est un point de contact de celui des plans tangents à Γ qui correspond au point où D

touche C. Quand le plan tourne autour de D, le point correspondant décrit Δ, ce qui prouve que tout le long de Δ, le plan tangent à Γ est le même.

La surface Γ est dite la développable circonscrite aux deux surfaces Σ et Σ'. C'est la polaire réciproque de C.

§ **282**. — Si la courbe C est plane et située dans un plan P, les plans polaires de tous ses points passent par un point fixe le pôle ω du plan P. La surface Γ est alors un cône de sommet ω.

§ **283**. — Théorème. — La figure polaire réciproque d'une conique est un cône du second ordre.

Coupons la figure par le plan P de la conique C, la surface R sera coupée par une conique ρ, et les plans polaires des points de P donneront, par leur intersection avec P les polaires par rapport à ρ, or, dans le plan P, la polaire réciproque de C par rapport à ρ est une conique γ, donc la polaire réciproque de C par rapport à R est le cône ayant pour sommet le pôle de P et pour base γ, ce qui démontre la proposition.

§ **284**. — Théorème. — La polaire réciproque d'une surface S du second ordre est une surface Σ du second ordre.

Je vais prouver que Σ est coupée par un plan quelconque ω suivant une conique. Soit P le pôle du plan ω; considérons le cône de sommet P circonscrit à Σ. Il est du second ordre, ayant pour base l'intersection de S et du plan polaire de P par rapport à S. Les plans tangents à S qui passent par P sont les plans tangents à ce cône, donc les points communs à Σ et au plan ω sont sur la conique polaire réciproque de ce cône, ce qui démontre la proposition.

§ **285**. — Théorème. — Si S et Σ sont deux surfaces du second ordre polaires réciproques l'une de l'autre, à un point P et son plan

polaire A par rapport à S, correspondent dans la figure corrélative un plan ω et son pôle α par rapport à Σ,

Soit en effet Q un point du plan A ; M et M′ les deux points où QA coupe la surface. Les plans tangents en M et M′ se coupent suivant une droite D et le faisceau D (PQ MM′) est harmonique.

Prenons la figure corrélative, soit Δ la droite qui correspond à D, au plan D,Q qui n'est autre que le plan A, correspond le point α qui se trouve sur Δ ; au plan DP correspond un point β qui se trouve dans le plan ω correspondant à P, aux plans DM, DM′, passant par D et touchant S, correspondent deux points μ et μ' situés sur Δ et sur Σ, or on a D (PQMM′) $=$ $(\alpha\beta\mu\mu')$ car le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans est égal à celui de leurs quatre pôles et comme D (PQ MM′) $= -1$, on a $(\alpha\beta\mu\mu') = -1$, donc β est dans le plan polaire de α par rapport à Σ. Mais le lieu de β est le plan ω ; le plan ω est donc ce plan polaire. Ce qui démontre la proposition.

§ **286**. — *Classe d'une surface.* — Nous verrons plus loin qu'on appelle ordre d'une surface le nombre de points réels ou imaginaires où elle est coupée par une droite quelconque, La classe d'une surface est le nombre de plans tangents qu'on peut lui mener par une droite quelconque.

Théorème. — Si deux surfaces S et Σ sont polaires réciproques, l'ordre de l'une est égal à la classe de l'autre.

En effet, si une droite D coupe S en m points, les m plans qui leur correspondent passeront par la droite Δ qui correspond à D et toucheront Σ. On pourra donc mener par Δ m plans tangents à Σ.

DIX-NEUVIÈME LEÇON

THÉORIE DES TRANSVERSALES. — APPLICATIONS

§ 287. — Nous avons vu, dans une leçon précédente, ce qu'on devait entendre par courbe ou surface d'ordre m ou de degré m. Je vais démontrer qu'une droite quelconque coupe toujours une telle courbe ou surface en m points réels ou imaginaires.

Nous admettrons, pour cela, la proposition suivante appelée *théorème de d'Alembert*. Une équation algébrique entière de degré m (à une inconnue) possède m racines réelles ou imaginaires.

§ 288. — Cette proposition doit être complétée par la suivante qui se démontre à l'aide des propriétés relatives à la division des polynomes. Si a b c.., l sont les racines d'une équation algébrique $F(x) = o$, Le polynome $F(x)$ est identique à un facteur constant près, au produit des m binomes $x - a$, $x - b$, $x - c$... $x - l$.

Plusieurs des binomes peuvent être égaux entre eux. Alors la racine correspendante doit compter pour plusieurs racines.

§ 289. — Les formules (6) du § 108 donnent les coordonnées d'un point d'une droite AB. On peut dire que les coordonnées homogènes de ce point sont :

$$x_0 + \lambda x_1, y_0 = \lambda y_1, z_0 + \lambda z_1, 1 + \lambda$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la surface (ou de la courbe) d'ordre m, préalablement mise sous forme homogène, comme

au § 131, on trouve une équation donnant les valeurs de λ, pour lesquelles le point considéré est sur la surface (ou la courbe). Cette équation est de degré m, elle a m racines à chacune desquelles correspond un point ; il y a donc bien m points où la droite AB rencontre la surface ou la courbe. Si quelques-uns de ces points sont confondus, on dit que la droite touche la surface (ou la courbe).

D'après la remarque faite ci-dessus, on peut écrire, K étant un facteur constant :

$$f(x) = \mathrm{K}(x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - l)$$

En effectuant le produit qui est dans le second membre, on voit que K est le coefficient de la plus haute puissance de x, tandis que le terme indépendant de x est égal à K multiplié par le produit des racines toutes changées de signe.

§ **290**. — Soit $\mathrm{F}(x, y, z, t) = o$ l'équation homogène d'une surface d'ordre m (ou d'une courbe, en supprimant la variable z). D'après ce qui précède, pour obtenir les valeurs du rapport AM : MB $= \lambda$ correspondant à un point M où la droite AB rencontre la surface (ou la courbe), il suffit de remplacer $x\ y\ z\ t$ par $x_0 + \lambda x_1\ y_0 + \lambda y_1\ z_0 + \lambda z_1\ 1 + \lambda$ ce qui fournit l'équation :

$$(1)\qquad \mathrm{F}(x_0 + \lambda x_1,\ y_0 + \lambda y_1,\ z_0 + \lambda z_1,\ 1 + \lambda) = o$$

Le terme indépendant de λ dans cette équation s'obtient en faisant $\lambda = o$ c'est $\mathrm{F}(x_0, y_0, z_0, 1)$ ou pour abréger F_0 ; il serait nul si le point A était sur la surface. Nous supposons qu'il n'en est pas ainsi.

Si dans l'équation on changeait λ en $\frac{1}{\lambda}$ on obtiendrait le même résultat qu'en échangeant les coordonnées de A avec celles de B, car le rapport AM : MB étant λ, le rapport BM : MA est $\frac{1}{\lambda}$.

Le terme de degré le plus élevé dans l'équation primitive, devenant celui de degré le moins élevé dans l'équation transformée, est $\mathrm{F}(x_1, y_1, z_1, 1)$ ou pour abréger F_1.

Si F_1 était nul λ deviendrait infini puisque BM : MA serait nul. Ceci

montre que si le terme degré le plus élevé dans une équation devient accidentellement nul, on doit envisager l'équation comme ayant une racine infinie.

§ **291**. — Désignons par p_1 p_2... p_m les m racines de l'équation (1) changées de signe, c'est-à-dire les m valeurs du rapport AM : BM, correspondant au cas où M est sur la surface (ou la courbe). Enfin désignons par P le produit de toutes ces quantités. D'après le § 289 on aura : $F_1 P = F_0$.

§ **292**. — Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer le théorème des transversales ou théorème de Carnot, dont un cas particulier a déjà été démontré au § 271.

Les valeurs p, p_2... p_n du paragraphe précédent seront appelées, pour abréger, valeurs *correspondantes* au segment AB.

Cela posé, considérons un polygone (plan dans le cas d'une courbe) et soient A B C D... ses sommets. Le théorème de Carnot consiste en ceci que le produit des valeurs correspondantes aux différents côtés AB, BC, CD, etc., est égal à + 1.

En effet, considérons par exemple un quadrilatère, appelons F_0 F F_2 F_3 les résultats obtenus en substituant dans le polynome F les coordonnées de ses quatre sommets. Appelons P le produit des rapports qui correspondent à AB, Q, R et S ceux des rapports qui correspondent respectivement à BC, CD et DA, on aura :

$$P \times F_1 = F_0 \quad Q \times F_2 = F_1 \quad R \times F_3 = F_2 \quad S \times F_0 = F_3$$

En multipliant ces égalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs, on a :

$$P \times Q \times R \times S = 1.$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ **293**. — *Applications*. — Nous avons vu au § 275, le cas où la surface S est un plan ; dans ce cas le théorème admet une réciproque,

que nous avons démontrée. Il en est de même dans le cas d'un triangle coupé par une droite. Dans ce cas simple où il n'y a qu'un point sur chaque côté, le théorème est souvent appelé *théorème de Ménélaüs.*

§ **294.** — *Cas d'une conique et d'un triangle.* — Soit un triangle ABC, et une courbe du second ordre coupant BC en α_1 et α_2, CA en β_1 et β_2, AB en γ_1 et γ_2. P sera ici le produit des deux rapports $B\alpha_1 : C\alpha_1$ et $B\alpha_2 : C\alpha_2$. Q sera le produit des deux rapports $C\beta_1 : A\beta_1$ et $C\beta_2 : A\beta_2$. Enfin R sera le produit de $A\gamma_1 : B\gamma_1$ par $A\gamma_2 : B\gamma_2$. On aura donc en écrivant que le produit des numérateurs égale celui des numérateurs :

$$(^2) \quad B\alpha_1 \times B\alpha_2 \times C\beta_1 \times C\beta_2 \times A\gamma_1 \times A\gamma_2 = D\alpha_1 \times C\alpha_2 \times A\beta_1 \times A\beta_2 \times B\gamma_1 \times B\gamma_2$$

Si six points sont tels que l'on ait cette égalité, ils sont sur une conique,

Par cinq de ces points, on peut faire passer une conique; cette coninique coupera de nouveau le troisième côté en γ'_2 par exemple, d'après le théorème de Carnot l'égalité (¹) est vraie quand on remplace γ_2 par γ_2. En divisant membre à membre l'égalité (²) telle qu'elle est écrite par celle obtenue en remplaçant γ_2 par γ'_2 on trouve que le rapport de $A\gamma_2$ à $B\gamma_2$ est égal à celui de $A\gamma'_2$ à $B\gamma'_2$, ce qui prouve (§ 6) que γ_2 et γ_2 coïncident *(ce qu'il fallait démontrer).*

Il résulte aussi de là qu'une courbe du second ordre est déterminée par cinq points, car les points α_1 α_2 β_1 β_2 et γ_1 étant donnés, en menant par γ_1 une droite AB qui coupe β_1 β_2 en A α_1 α_2 en B, l'égalité (²) détermine γ_2.

Comme par ces cinq points on peut aussi faire passer une conique qui coïncidera alors avec la courbe du second ordre, on en conclut que *toute conique est une courbe du second ordre.*

Théorème de Desargues. — Considérons toutes les coniques passant par α_1 α_2 β_1 β_2, soient γ_1 γ_2 les deux points variables où elles coupent

la droite fixe AB. Les seuls facteurs variables dans ([2]) seront ceux qui contiennent, γ_1 et γ_2. On en conclut que le quotient de $A\gamma_1 \times A\gamma_2$ par $B\gamma_1 \times B\gamma_2$ est constant. Or on a vu (§ 92) que c'est là une relation d'involution. On retrouve ainsi le théorème de *Desargues*.

§ **295**. — *Cas des courbes du troisième ordre ou cubiques.* — Considérons un triangle coupé par une courbe du troisième ordre. Ici il y aura trois points sur chaque côté, α_1 α_2 α_3 sur BC, β_1 β_2 β_3 sur CA, γ_1 γ_2 γ_3 sur AB. On aura donc l'égalité :

([3]) $B\alpha_1 \times B\alpha_2 \times B\alpha_3 \times C\beta_1 \times C\beta_2 \times C\beta_3 \times A\gamma_1 \times A\gamma_2 \times A\gamma_3 =$ $C\alpha_1 \times C\alpha_2 \times C\alpha_3 \times A\beta_1 \times B\beta_2 \times A\beta_3 \times B\gamma_1 \times B\gamma_2 \times B\gamma_3$

Théorème. — *Si six des neuf points considérés sont sur une conique, les trois autres sont en ligne droite et réciproquement.*

En effet, si les six premiers points sont sur une conique, on a l'égalité ([2]) divisant membre à membre l'égalité ([3]) et l'égalité ([2]) on trouve :

([4]) $$B\alpha_3 \times C\beta_3 \times A\gamma_3 = C\alpha_3 \times A\beta_3 \times B\gamma_3$$

L'égalité ([4]) exprime que les trois derniers points sont en ligne droite.

Réciproquement, les trois derniers points étant en ligne droite, on a l'égalité ([4]). Divisant ([3]) par ([4]) membre à membre on a l'égalité ([2]). Les six premiers points sont donc bien sur une conique.

§ **296**. — Théorème de Pascal. — Le théorème de Pascal est une conséquence de ce qui précède. Observons d'abord que trois droites ayant pour équations $P = 0$ $Q = 0$ $R = 0$ constituent une cubique ayant pour équation $PQR = 0$.

Considérons l'hexagone ayant pour sommets α_1 α_2 β_1 β_2 γ_1 γ_2 se suivant dans l'orde indiqué. Numérotons les côtés dans le même ordre.

Soient ABC les sommets du triangle formé par les côtés de rang

impair. Les côtés de rang pair constitueront une cubique coupant les côtés du triangle ABC d'abord aux six sommets de l'hexagone, puis en six autres points, qui sont les points de rencontre des côtés opposés, α_3, β_3 γ_3.

D'après le théorème précédent, si les six sommets de l'hexagone sont sur une conique, ces trois derniers points sont en ligne droite et réciproquement. On a ainsi le théorème de Pascal et sa réciproque

§ **297.** — *Autre théorème relatif aux cubiques.* — Considérons une droite coupant une cubique en trois points 1 2 3. Une seconde droite coupant cette courbe en 4 5 6. La droite 1, 4 coupe la courbe en un point 7, la droite 2, 5 la coupe en un point 8, et la droite 3, 6 en un point 9. Je dis que les points 7, 8, 9 sont en ligne droite.

Appliquons en effet le théorème du § 295 au triangle formé par les trois droites 1, 4, 7; 2, 5, 8; 3, 6, 9. Les points 1, 4, 2, 5, 3, 6 étant sur une conique formée de deux droites (1, 2, 3) et (4, 5, 6) les trois autres points 7, 8, 9 sont en ligne droite.

§ **298.** — *Cas particulier.* — Si 1 et 4 coïncident, ainsi que 2 et 5, auquel cas 3 et 6 coïncident aussi, les droites 1, 4 ; 2, 5 ; 3, 6 sont des tangentes à la cubique. On a alors cette proposition :

Si trois points d'une cubique sont en ligne droite, les tangentes en ces points rencontrent de nouveau la courbe en trois points situés en ligne droite. Cette seconde droite est souvent appelée droite *satellite* de la première.

§ 399. — Si 1, 4, 7 coïncident, c'est que la droite 1, 4, 7 coupe la courbe en trois points confondus en un seul ; un tel point se nomme un point d'inflexion. Si 1, 4, 7 sont confondus ainsi que 2, 5, 8 on voit que 3, 6, 9 le sont aussi. Donc : *La droite joignant deux points d'inflexion d'une cubique passe par un troisième point d'inflexion..*

VINGTIÈME LEÇON

PRINCIPE DE CORRESPONDANCE. — THÉORIE DES CUBIQUES PLANES

§ **300**. — *Le principe de correspondance de Chasles* consiste dans la proposition suivante :

Si entre deux systèmes de points sur une droite existe une correspondance telle qu'à un point de la droite considéré comme faisant partie du premier système correspondant m points du second système, et qu'à un point de la droite considéré comme appartenant au second système correspondent p points du premier système, *il y a sur la droite* m + p *points qui coïncident avec leurs correspondants.*

Soient, en effet, A et B deux points de la droite, tels que ni l'un ni l'autre ne coïncident avec un de leurs correspondants. Soit M un point quelconque de la droite ; au lieu de le définir par son abcisse, définissons-le par la valeur λ du rapport AM : MB.

Entre les rapports λ, μ de deux points correspondants M, P il y a d'après l'hypothèse une relation de degré m par rapport à μ, et de degré p par rapport à λ, puisqu'à une valeur de λ il correspond m valeurs pour μ, et à une valeur de μ, p valeurs pour λ.

Cette relation ne manque pas de terme constant, car s'il en était ainsi pour $\lambda = 0$, ou aurait $\mu = 0$, et le point A coïnciderait avec un de ses correspondants, Si nous avions BM : MA $= \lambda'$, BP : PA $= \mu'$ nous aurions

$$\mu' = \frac{1}{\mu} \text{ et } \lambda' = \frac{1}{\lambda}.$$

Dans la nouvelle relation en λ' et μ', il doit y avoir un terme constant, sans quoi B coïnciderait avec un de ses correspondants ; mais le terme constant de la nouvelle relation provient du terme en $\lambda^m \mu^p$ dans l'ancienne. L'ancienne relation doit donc contenir un terme de cette espèce. Pour trouver les points qui coïncident avec leurs correspondants, il faut faire $\lambda = \mu$ ce qui donne une équation contenant comme terme de degré le plus élevé un terme en λ^{m+p}. *Il y a donc* $m+p$ *racines, c'est-à-dire* $m+p$ *points coïncidant avec leurs homologues.*

Le théorème s'applique encore, si au lieu de points sur une droite, on considère des droites (dans un plan) passant par un point fixe (ou des plans passant par une droite fixe). Il suffit pour ramener ce cas au précédent, de couper par une droite ne passant pas par le point fixe (ou par la droite fixe).

§ **301**. — Voici une application de ce théorème : c'est la démonstration donnée par Chasles du théorème dit de *Bezout*, relatif aux courbes planes.

Deux courbes, l'une d'ordre m, *l'autre d'ordre* p *se coupent en* mp *points.*

Prenons deux points A et B qui ne sont situés ni sur l'une, ni sur l'autre des deux courbes, par A menons une droite D qui coupe la première courbe en m points, joignons chacun de ces m points au point B, cela fait m droites ; une de ces droites coupe la première courbe en p points ; on a donc en tout mp points ; en les joignant à A, on obtient mp droites Δ. On voit donc qu'à une droite D correspondent mp droites Δ. Réciproquement, à chaque droite Δ correspondent mp droites D, comme on le voit, en commençant le raisonnement par la seconde courbe. Donc il y a $2mp$ droites D qui coïncident avec une de leurs correspondantes.

Or, une droite D peut coïncider avec Δ de deux façons, soit parce que D et Δ passent par un point commun aux deux courbes, soit parce que D passe par B ; mais si D passe par B, les mp droites Δ coïncident avec D, et cela fournit mp solutions pour l'équation donnant les

droites coïncidant avec leurs homologues ; il n'en reste donc que mp provenant des points communs aux deux courbes. (Il faut avoir soin que AB ne passe par un de ces points sans quoi la démonstration ne serait pas nette). Le théorème est ainsi démontré, et l'on voit que les abcisses (par exemple) de ces points, sont donnés par une équation de degré mp.

§ **302.** — Voici une proposition sans rapport avec ce qui précède, mais qui nous sera utile dans la suite. Une équation du second degré à deux variables peut s'écrire :

$$(1) \qquad Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0$$

On peut supposer que C n'est pas nul, car si C était nul, l'équation n'étant que du premier degré en y, une parallèle à OY ne couperait la courbe qu'en un point à distance finie ; OY serait parallèle à une asymptote ; on peut, par un choix convenable des axes, faire en sorte qu'il n'en soit pas ainsi.

Si l'on résout cette équation du second degré en y, on trouve pour la quantité sous le radical le polynome.

$$(2) \qquad (B^2 - AC)\,x^2 + 2(BE - CD)\,x + E^2 - CF$$

On voit bien que *pour que l'équation du deuxième degré proposée représente deux droites*, il faut que la quantité ci-dessus soit un carré parfait afin qu'en extrayant la racine, on trouve pour y deux expressions du premier degré en x.

En écrivant que le polynome ci-dessus est un carré parfait, et divisant par C qui, par hypothèse n'est pas nul, on trouve la relation :

$$(3) \qquad -AE^2 + 2\,BDE - CD^2 + F\,(B^2 - AC) = 0$$

Ce qu'il faut retenir, c'est que *cette relation est du troisième degré par rapport aux coefficients.*

Théorie des Cubiques planes

§ **303**. — Considérons une équation du troisième degré homogène en $x\,y\,t$, son premier membre est une somme de termes de la forme $Ax^{\alpha}y^{\beta}t^{\gamma}$, $\alpha\,\beta\,\gamma$ étant trois entiers (pouvant être nuls) et dont la somme est égale à (¹). D'après le § 290, pour chercher l'intersection d'une droite AB avec la courbe, il faut remplacer $x\,y\,t$ par $x_0 + \lambda x_1$ $y_0 + \lambda y_1$ $1 + \lambda$. On obtiendra ainsi une équation en λ que nous n'avons pas besoin de former. Il suffit de remarquer qu'en gardant les notations du § 290, l'équation peut s'écrire.

$$(1) \qquad f_0 + g_0\lambda + g_1\lambda^2 + f_1\lambda^3 = 0$$

f_0 c'est $f(x_0\,y_0)$, f_1 c'est $f(x_1\,y_1)$ (§ 290)

On voit sans peine que g_0 est *du premier degré* en $x_1\,y_1$ et du *second* en $x_0\,y_0$, comme l'équation ne change pas quand on remplace λ par son inverse en échangeant en même temps les coordonnées des points A et B, on voit que g_1 se déduit de g_0 en remplaçant $x_0\,y_0$ par $x_1\,y_1$ et inversement ; g_1 est donc du premier degré par rapport aux coordonnées de A, et du second par rapport à celles de B.

§ **304**. — Si l'on fait tourner la droite AB autour de A, et si l'on prend chaque fois sur cette droite le point B de façon que $g_0 = 0$, le lieu de B est une *droite*, car l'équation $g_0 = 0$ est du premier degré par rapport aux coordonnées de B. C'est la *droite polaire de* A.

Si l'on fait tourner cette même droite autour de B, en choisissant chaque fois le point A tel que $g_0 = 0$, le lieu de A est une *conique*, car l'équation $g_0 = 0$ est du second degré par rapport aux coordonnées de A ; c'est la *conique polaire de* B.

L'équation $g_0 = 0$ exprime donc à la fois que la conique polaire de B contient A, ou que la droite polaire de A passe par B. Donc si l'un de ces faits a lieu l'autre a lieu aussi.

La conique polaire de A se déduit de la conique polaire de B en

échangeant les coordonnées de A avec celles de B. Son équation est donc $g_1 = 0$ en supposant dans cette équation que $x_0\, y_0$ soient des quantités fixes, $x_1\, y_1$ étant les variables.

g_1 étant ainsi considéré comme un polynome aux variables $x_1\, y_1$ ses coefficients sont du premier degré en $x_0\, y_0$, on obtient donc la condition pour que la conique polaire A se réduise à deux droites en mettant dans la relation (3) du § 302, la valeur qu'ont les coëfficients dans l'équation $g_1 = 0$. Mais ces coefficients étant du premier degré par rapport aux coordonnées de A, et la relation (3) étant du troisième degré, c'est l'équation d'une cubique quand on y considère les coordonnées de A comme variables. Donc *le lieu du point* A *tel que sa conique polaire se décompose en deux droites est une cubique.* Cette cubique se nomme la *Hessienne* de la cubique proposée, du nom de *Hesse*, son inventeur.

§ **305**. — Supposons maintenant que le point A soit sur la cubique, f_0 est nul. L'équation (1) débarrassée de la racine nulle n'est plus que du second degré.

L'équation $g_0 = 0$ exprime alors que l'équation (1) a une autre racine nulle, c'est-à-dire que la droite AB touche la courbe en A. La courbe admet donc en A une tangente ayant pour équation $g_0 = 0$ ($x_1\, y_1$ étant les variables). Ainsi la tangente est la droite polaire d'un point A de la courbe. Il résulte alors de ce qui précède, que si la tangente en A passe par un point B, la conique polaire de B passe par A et inversement. *Les points de contact des tangentes issues d'un point* B *sont donc les six points où la conique polaire de* B *coupe la cubique.*

Il peut arriver que g_0 soit identiquement nul, c'est-à-dire que le coefficient d'x_1 celui d'y_1 et le terme indépendant soient nuls. Alors toute droite passant par A coupe la courbe en deux points confondus avec A, on dit que A est un *point double.*

Il y a des cubiques qui n'ont aucun point double, on peut en donner des exemples. Dans ce qui suit, je suppose que A n'est pas un point double.

A étant toujours sur la courbe, l'équation $g_1 = 0$ exprime que la

somme des deux racines non nulles de l'équation ($_4$) est égale à zéro Or si on nomme M et P les deux points autres que A où AB coupe l cubique, les racines considérées sont les rapoorts AM : MB et AP : PB. Les points M et P seront donc dans ce cas conjugués de A et B. Ainsi si la droite AB tourne autour de A, et si le point B est choisi de façon que A et B soient conjugués par rapport aux points ou AB coupe la cubique, le lieu de B est la conique polaire de A.

Cette conique touche la cubique en A. En effet, si parmi les sécantes passant par A nous considérons celle qui touche la cubique en A et la coupe de nouveau en M, le conjugué de A par rapport à A et M étant A lui-même, la droite AM ne rencontre la conique polaire qu'en A, c'est donc une tangente à cette courbe.

Il y aurait exception, si M coïncidait avec A. Dans ce cas, et *dans celui-ci seulement*, tout point B de la tangente est conjugué de A par rapport à A et A. La conique polaire se décompose alors dans la tangente et une autre droite.

La tangente en A coupant la courbe en trois points confondus, le point A est un point d'inflexion.

§ **306**. — *Si la conique polaire de* A *se décompose en deux droites, le point* A *est ou double ou d'inflexion* Si A n'est pas double, le lieu du conjugué de A ne saurait être une droite passant par A (car les points M et P sont distincts de A). Si donc le lieu se décompose, il y a deux droites dont l'une ne passe pas par A, et comme la conique polaire touche toujours la courbe en A, l'une de ces droites est la tangente en A. On est donc dans le cas examiné ci dessus.

Il résulte de là que les points d'inflexion sont les points où la hessienne coupe la courbe. Si donc la courbe n'a pas de points doubles, il y a 3×3 ou neuf points d'inflexion.

Il résulte du § 299 que ces points sont 3 à 3 en ligne droite.

§ 307. — Théorème. — *Toute cubique qui passe par les neuf points d'inflexion d'une cubique, admet aussi ces points pour points d'inflexion.* Soit en effet A un de ces points, B, C, D trois autres, les droi-

tes AB AC AD sont supposées distinctes ; elles coupent de nouveau la courbe en E F G, qui sont trois points d'inflexion. La conique polaire de A se décompose, donc les conjugués P Q R de A par rapport à BE, CF, DG, sont en ligne droite ; mais P Q R appartiennent aussi à la co-conique polaire de A par rapport à une seconde cubique passant par les neuf points d'inflexion. Cette seconde conique polaire ayant trois points P Q R en ligne droite, se décompose aussi, donc A est un point d'inflexion pour la deuxième cubique.

§ **308**. — Manière dont sont groupés les neuf points d'inflexion. — Il est facile de voir que par chaque point A passent quatre droites contenant chacune deux points d'inflexion. On peut former *quatre triangles* contenant chacun les neuf points d'inflexion, 3 sur chaque côté. Soient 1 2 3 4 5 6 7 8 9, les 9 points désignés chacun par un numéro. On peut supposer que ces triangles sont les suivants :

1er Triangle	1 2 3	3e Triangle	1 5 9
	4 5 6		2 6 7
	7 8 9		3 4 8
2e Triangle	1 4 7	4e Triangle	1 6 8
	2 5 8		2 4 9
	3 6 9		3 5 7

§ **309**. — Théorème. — *Sur les neuf points d'inflexion. Il y en a toujours trois réels, et trois seulement. (On suppose que l'équation de la cubique à ses coefficients réels.)*

1° *Il n'y a pas moins de trois points réels.* Si un point est d'inflexion et s'il est imaginaire, son conjugué est aussi d'inflexion. On peut donc trouver trois couples de points d'inflexion tels que deux points d'un couple soient ou réels ou conjugués. La droite qui joint deux points d'un même couple est réelle ; elle rencontre la cubique en un troisième point qui est d'inflexion, et qui est aussi réel sans quoi elle rencontrerait la courbe en un quatrième point conjugué de celui-ci. Il y a donc trois points d'inflexion réels au moins, un sur chacune de ces droites,

et il y a un triangle inflexionnel réel. (Il est facile de voir qu'un point d'inflexion ne peut pas être un sommet de triangle inflexionnel.)

§ **310**. — 2° *Il n'y a pas plus de trois points réels*. Soit ABC le triangle inflexionnel réel, $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ les points d'inflexion situés sur BC, $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$, ceux situés sur CA, $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$, ceux situés sur AB. Pour abréger, désignons par $p_1\ q_1\ r_1 \ldots$ les rapports $B\alpha_1 : C\alpha_1$, $C\beta_1 : A\beta_1$, $A\gamma_1 : B\gamma_1 \ldots$ etc.

On peut supposer que α_1 est en ligne droite avec $\beta_1\gamma_1$, avec $\beta_2\gamma_3$ et avec $\beta_3\gamma_2$. On a alors d'après le théorème de Carnot :

$$p_1 q_1 r_1 = 1 \quad p_1 q_2 r_3 = 1 \quad p_1 q_3 r_2 = 1$$

et aussi

$$p_1 p_2 p_3\ q_1 q_2 q_3\ r_1 r_2 r_3 = 1$$

Multiplions les trois premières égalités membre à membre, et divisons par la troisième, on aura en nommant P le produit $p_1 p_2 p_3$

$$p_1^3 = P$$

P est réel, c'est le produit des racines d'une équation du troisième degré.

Cette équation ne donne pour p_1 qu'une seule valeur réelle, et comme elle fournit aussi p_2 et p_3, p_2 et p_3 sont imaginaires. Il y a donc un seul point réel sur chaque côté du triangle considéré.

§ **311**. — On voit par ce qui précède, comment on trouve les points d'inflexion quand on a un des triangles inflexionnels. La recherche d'un pareil triangle peut s'effectuer comme il suit.

Soit $F = 0$ l'équation de la cubique, $H = 0$ celle de sa hessienne. La cubique $\lambda F + H = 0$ passe par les neuf points d'inflexion. Elle les admet donc pour points d'inflexion (§ 307). En déterminant λ de façon que cette cubique coïncide avec sa hessienne, tous les points de cette courbe seront d'inflexion, et elle se reduira aux trois côtés d'un triangle inflexionnel. On trouvera donc une équation en λ du quatrième degré, dont les quatre racines fourniront les quatre triangles.

VINGT-UNIÈME LEÇON

INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE

§ **311.** — *Une courbe d'ordre* m dans l'espace, est une courbe qu'un plan quelconque coupe en m points. L'intersection de deux surfaces du deuxième ordre est donc une courbe d'ordre 4 car un plan quelconque coupe les deux surfaces suivant deux coniques qui se coupent en quatre points.

Il est clair qu'en un point commun aux deux surfaces, les plans tangents aux dites surfaces, s'ils ne coïncident pas, se coupent suivant une droite qui est la *tangente* à la courbe d'intersection en ce point.

Je supposerai d'abord que la courbe d'intersection ne soit pas l'ensemble d'autres courbes d'ordre moindre, et de plus que les deux surfaces ne soient tangentes entre elles en aucun point.

§ **312.** — Théorème. — Si d'un point quelconque de l'espace comme sommet de projection, on projette la courbe sur un plan, on obtient une courbe du quatrième ordre ayant *deux points doubles* réels ou imaginaires.

Soit S le sommet et P le plan de projection. Un plan passant par S coupe la courbe suivant quatre points et par conséquent le cône projetant la courbe suivant quatre génératrices, ces quatre droites rencontrent P en quatre points situés à l'intersection de la droite trace du plan considéré sur le plan P, avec la projection de la courbe ; cette droite et cette courbe projections se coupant en quatre points, la courbe est du quatrième ordre.

Considérons maintenant la droite D d'intersection des *plans polaires*

de S par rapport aux deux surfaces. La projection de cette droite sur le plan P est une droite Δ. Je dis que tout point double de la courbe projection de la proposée est situé sur Δ. En effet, soit M un tel point, étant double il est la projection de deux points distincts de la courbe de l'espace. Soient P et Q ces deux points, L le conjugué de S par rapport à P et Q. L est à la fois dans les deux plans polaires de S par rapport aux deux surfaces puisque P et Q appartiennent aux deux surfaces. L est donc sur D, et comme il se projette en M, M est sur Δ.

Réciproquement, si M est à la fois sur la courbe projection et sur Δ c'est un point double de cette courbe. En effet, puisque M est un point de la courbe projection, c'est la projection d'un certain point P de la courbe commune aux deux surfaces. Puisque M est sur Δ c'est la projection d'un point L située sur D, c'est-à-dire dans chacun des deux plans polaires de S par rapport aux deux surfaces.

Soient Q_1 et Q_2 les deux points où la droite SM qui contient déjà le point P et le point L rencontre de nouveau les deux surfaces. Le conjugué harmonique de P par rapport à S et L doit être Q_1 parce que L est dans le plan polaire de S par rapport à la première surface, il doit être Q_2, L étant aussi dans le second plan polaire. Donc Q_1 et Q_2 coïncident; donc SP rencontre de nouveau les deux surfaces au même point Q. M est la projection de deux points P et Q sur les deux surfaces; c'est un point double de la projection.

La droite Δ doit rencontrer cette projection en quatre points, mais ces points devant être doubles, il n'y en a que deux distincts, la proposition se trouve donc démontrée.

§ 313. — *Remarque*. Le plan SΔ coupe les deux surfaces suivant deux coniques, et S a même polaire D par rapport à ces deux courbes la construction des points doubles équivaut à celle des deux cordes communes à ces coniques passant par S, elle se fait comme on l'a vu au § 226.

Théorème. — Si le sommet S de projection est sur la courbe, la pro-

jection de cette courbe n'est plus que du troisième ordre, mais elle n'a pas de points doubles.

En effet, le plan passant par S coupe alors la courbe en trois points seulement en dehors de S ; sa projection sur le plan P ne coupe donc la projection qu'en trois points.

Ici les deux plans polaires de S passent par S, la droite D passe par S, la droite Δ se réduit à un point, ce point est bien sur la courbe projection, mais c'est un point simple, c'est le point où la tangente en S à la courbe coupe le plan P.

§ **314**. — Théorème. — Par un point quelconque S pris sur la courbe, on peut mener quatre plans qui passent à la fois par la tangente à la courbe en S, et par une autre tangente en autre point M. (J'appellerai ces plans des *plans bitangents*.)

Pour le démontrer, je projette cette courbe du point S suivant une cubique plane, comme dans le théorème précédent, et j'appelle T le point où la tangente en S rencontre le plan P de projection ; les plans passant par ST et touchant encore la courbe ailleurs, couperont le plan P suivant une droite passant par T, et touchant la courbe projection.

Réciproquement, il est clair qu'à une droite passant par T et touchant la cubique projection, correspondra un plan bitangent.

Or la conique polaire de T par rapport à cette cubique, étant tangente en T, coupe de nouveau la cubique en $2 \times 3 - 2$ ou quatre points, on a vu au (§ 305) que les droites joignant T à ces quatre points sont tangentes à la cubique ; les quatre plans menés par ST et ces quatre points sont donc bien bitangents.

§ **315**. — Théorème. — Sur une droite joignant les points de contact d'un plan bitangent il existe un point et un seul ayant même plan, polaire par rapport aux deux surfaces, le cône ayant pour sommet ce point et contenant la courbe d'intersection, est du second ordre.

Soient S et M les deux points de contact d'un plan bitangent, les angentes en S et M se coupent en un point T, puisqu'elles sont dans ce

plan. Si donc on coupe les deux surfaces par le plan SMT, on aura deux coniques Γ, Γ_1 bitangentes en M et S, les tangentes en ces points étant MT et ST. Tout point P de SM a pour polaire par rapport à Γ et Γ_1, la droite passant par le conjugué harmonique de P par rapport à M et S, et par le point T.

Considérons un autre plan passant par SM. Il coupe les deux surfaces suivant deux coniques C et C_1 dont SM est une corde commune. SM passe donc par l'un des points qui ont même polaire par rapport à C et à C_1, soit P ce point (§ 224). Dès lors le point P a même plan polaire par rapport aux deux surfaces, le plan de sa polaire par rapport à Γ et Γ_1 et de sa polaire par rapport à C et C_1. C'est d'ailleurs le seul sur SM possédant cette propriété, car tout point de SM qui la possède, doit avoir même polaire par rapport à C et C_1.

§ 316. — Le cône de sommet P ayant pour directrice la courbe n'est que du second ordre. En effet, soit PQ une génératrice de ce cône obtenue en joignant P à un point Q de la courbe, soit L le point où PQ coupe le plan polaire, le point Q conjugué de R par rapport à P et L appartiendra aussi aux deux surfaces, c'est-à-dire à la courbe. Dès lors un plan passant par P coupera la courbe en quatre points deux à deux en ligne droite avec P. Il ne coupera donc le cône que suivant deux génératrices.

On voit facilement que si un cône passant par l'intersection est du second ordre, c'est qu'un plan passant par son sommet ne le coupe que suivant deux génératrices. Il y a, par suite, deux points du cône sur chacune d'elles, et le sommet du cône a même plan polaire par rapport aux deux surfaces.

§ **317**. — *Corollaire*. Comme il passe par un point donné de la courbe quatre plans bitangents, il y aura *quatre points* ayant même plan polaire par rapport aux deux surfaces.

§ **318**. — Théorème. — Il y a quatre points ayant même plan polaire par rapport aux deux surfaces, ils forment un tétraèdre dont

chaque face est le plan polaire du sommet opposé (*Tétraèdre conjugué*).

Soit A l'un des points ayant même plan polaire par rapport aux deux surfaces (Ce qui précède prouve son existence). Son plan polaire P coupe les deux surfaces suivant deux coniques C, C', soit A_1 A_2 A_3 le triangle conjugué commun à ces deux coniques. Le tetraèdre A A_1 A_2 A_3 possède la propriété énoncée. En effet, le plan polaire de A_1 passe d'abord par la polaire A_2 A_3 de A_1 ; il passe de plus par A puisque le plan polaire de A passe par A_1 ; c'est donc le plan AA_2 A_3 Même démonstration pour chaque sommet.

Corollaire. Par l'intersection de deux surfaces du second ordre, on peut faire passer quatre cônes du second ordre et pas davantage.

(Il est bien entendu que je n'examine pas ici le cas où l'intersection se compose de plusieurs lignes d'ordre inférieur à quatre).

§ **319**. — Les théorèmes précédents, transformés par polaires réciproques, donnent des résultats intéressants. Les plans polaires des différents points d'une courbe enveloppent, comme on l'a vu (§ 281) une développable ; si la courbe est plane, la développable est un cône. Inversement, aux plans tangents à un cône correspond une courbe plane.

Nous avons vu au (§ 281) que la polaire réciproque d'une surface du second ordre est aussi du second ordre.

On a, dès lors, la proposition suivante, dont je n'écris que l'énoncé.

§ **320**. — Les plans tangents communs à deux surfaces du second ordre sont tangents (c'est-à-dire passent les tangentes) à quatre coniques planes, les plans de ces courbes ont même pôle par rapport aux deux surfaces. Il en résulte que ces plans sont les faces du tétraèdre. AA_1 A_2 A_3 dont il est question au paragraphe précédent.

Cas particuliers de l'intersection

§ **321**. — 1° *Cas particulier*. — Les deux surfaces sont tangentes en un point. Elles n'ont pas de droite commune.

Théorème. — Le cône ayant pour sommet le point de contact des deux surfaces et passant par l'intersection, est du second ordre.

Soit S ce point de contact, menons par S un plan quelconque, il coupe les deux surfaces suivant deux coniques tangentes en S, et par suite se coupant seulement en deux autres points P et Q. Ce cône n'a donc que deux génératrices SP SQ dans chaque plan passant par S, ce qui démontre la proposition.

Corollaire. — La courbe d'intersection présente un *point double* en S les deux tangentes étant l'intersection du cône ci-dessus avec le plan tangent en S aux deux surfaces.

On peut remarquer que le point S a ici même plan polaire par rapport aux deux surfaces (à savoir le plan tangent commun).

§ **322**. — 2° *Cas particulier*. — Les surfaces se touchent en deux points (qui peuvent être réels ou imaginaires conjugués). Soient P et Q ces deux points, M un troisième point de l'intersection. Le plan M P Q coupe les deux surfaces suivant deux coniques tangentes entre elles en P et Q, et passant en outre par M. Ces deux coniques coïncident donc et cette conique unique fait dès lors partie de l'intersection. Comme l'intersection doit être du quatrième degré, un plan doit le couper en quatre points. Si elle se compose d'une conique unique, c'est que ces quatre points seront toujours confondus deux à deux, ou qu'un plan coupera les deux surfaces suivant deux coniques bitangentes. Cela exige que les deux surfaces se touchent en tous les points de la conique d'intersection, on dit alors qu'elles sont circonscrites. Si nous écartons ce cas, nous voyons qu'il y a des points d'intersection en dehors de la conique considérée). Soit N un de ces points, le plan

NPQ coupera les deux surfaces suivant une même conique, comme on le voit par un raisonnement identique au précédent ; l'intersection se composera donc de deux coniques.

A ce cas se rattache le théorème suivant : *Si deux surfaces du second ordre ont une conique commune, elles en ont une seconde et sont bitangentes* (à moins qu'elles ne soient circonscrites).

En effet, si elles ne sont pas circonscrites, elles ont des points communs en dehors de cette conique. (Dans un plan quelconque elles en ont deux). Soient $M\,M_1\,M_2$ trois de ces points, le plan $MM_1\,M_2$ coupe le plan de la conique donnée suivant une droite qui coupe cette conique en deux points P et Q (réels ou imaginaires). Le plan $M\,M_1\,M_2$ coupe les deux surfaces suivant deux coniques qui ont cinq points communs $M\,M_1\,M_2\,P\,Q$ et qui, par suite, coïncident. Cela fait donc deux coniques communes. En P les deux surfaces ont toutes deux pour plan tangent le plan des tangentes aux deux coniques, de même en Q, les surfaces sont donc bitangentes en ces points.

Les deux coniques considérées sont deux coniques qui se coupent en P et Q. Je vais montrer que par ces deux coniques, il passe deux cônes du second ordre. La démonstration est la même au fond que celles que nous avons faites ci-dessus pour les quatre cônes. On voit ici que par une tangente en un point M de l'une des coniques, on ne peut mener que deux plans tangents à l'autre en M' et M'' et sur chacune des droites MM' MM'' on trouvera un point et un seul ayant même plan polaire par rapport aux deux surfaces.

§ **323**. 3° *Cas particulier*. — Les deux surfaces se touchent en trois points PQR, mais le plan PQR n'est tangent à aucune des deux surfaces.

On démontre, comme dans le cas précédent, que le plan PQR coupe ces deux surfaces suivant uue même conique. D'ailleurs le point où sê coupent les plans tangents communs en PQR, est unique. Car les tangentes en PQR à la conique dans ce plan, forment nécessairement un triangle, cette conique ne se réduisant pas à deux droites puisque le plan n'est pas tangent. Ces plans ce coupent en un point qui est le

pôle de PQR par rapport aux deux surfaces. Dès lors les cônes circonscrits aux deux surfaces suivant la conique commune sont les mêmes, puisqu'ils ont même sommet (le pôle de PQR) et une conique commune ; les deux surfaces étant circonscrites à un même cône le long d'une même conique sont circonscrites l'une à l'autre. Elles se touchent tout le long de la conique et n'ont pas d'autre point d'intersection.

4° *Cas particulier*. — **Les deux surfaces ont une droite commune D.** Ce cas est très intéressant. Le reste de l'intersection est une courbe coupée en trois points seulement, par un plan quelconque, on l'appelle une cubique gauche. L'étude de ces courbes fera l'objet d'une leçon spéciale. Démontrons seulement ici que la courbe rencontre D en deux points où les surfaces ont même plan tangent.

Un plan passant par D coupe la première surface suivant une droite Δ rencontrant D en A ; la seconde suivant une droite Δ_1, rencontrant D en A_1, En outre Δ et Δ_1, se coupent en M qui est un point de la cubique. Pour que M vienne sur D, il faut que A et A_1. coïncident. Or, le rapport anharmonique de quatre points A et celui des quatre points A_1 sont égaux entre eux comme égaux tous deux à celui des quatre plans AMA_1 tangents en A à la première surface et en A_1 à la seconde. A et A_1 forment donc deux divisions homographiques, dont les deux points doubles réels ou imaginaires sont deux points répondant à la question.

En ces points P et Q les deux surfaces ont même plan tangent puisque ces points sont précisément déterminés par la condition que les deux points de contact d'un plan tangent coïncident.

§ 324. — 5° *Cas particulier*. — Les surfaces ont en commun deux génératrices de même système D et D_1.

L'intersection est alors un quadrilatère gauche comme on l'a vu déjà au § 279. On peut encore le démontrer comme il suit : par la droite D commune aux deux surfaces, faisons passer un plan qui coupe la droite D_1 en M. Ce plan touche la première surface en A, la seconde en A_1 ; A et A_1 forment deux divisions homographiques comme au paragraphe précédent. Soient P et Q les deux points doubles, R et S

les positions correspondantes de M. PR par exemple est à la fois sur les deux surfaces, puisque les droites AM A_1M situées chacune sur une des surfaces coïncident quand A et A_1 viennent en P. Même démonstration pour QS. On voit ici que les surfaces se touchent en quatre points.

Il est bien entendu que P et Q peuvent être réels ou imaginaires, distincts ou confondus.

Le cas particulier où les deux surfaces auraient en commun deux génératrices de système différent, n'est autre que celui où elles ont une conique commune.

§ **325**. — Théorème. — Si deux surfaces du second ordre sont circonscrites à une même troisième, elles sont bitangentes, et par suite se coupent suivant deux courbes planes.

En effet, soient S et S_1 deux surfaces circonscrites à une troisième Σ le long de deux courbes planes C et C_1, soit D la droite d'intersection des plans contenant C et C_1, P et Q les points où elle coupe Σ. Ces points sont aussi sur C et C_1. En ces points, les plans tangents à S et S_1 sont les mêmes qu'à Σ, et par suite, les deux surfaces S et S_1 sont bitangentes en ces points; elles se coupent donc suivant deux courbes planes Γ et Γ_1.

Réciproquement, si deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes, leurs polaires réciproques seront circonscrites aux deux cônes polaires réciproques de ces deux courbes. Ces deux nouvelles surfaces étant circonscrites à deux cônes, se couperont suivant deux courbes planes, par conséquent les deux surfaces primitives seront circonscrites aux deux cônes polaires réciproques des deux nouvelles courbes planes; de sorte que deux surfaces qui se coupent suivant deux courbes planes sont circonscrites à deux cônes du second ordre.

§ **326**. — Soit $F = 0$ l'équation d'une surface du deuxième ordre, $P = 0$ $Q = 0$ les équations de deux plans; l'équation $\lambda F + PQ = 0$ représente une surface passant par tous les points où la surface $F = 0$

est coupée par les deux plans. On peut d'ailleurs déterminer λ de façon qu'elle passe par un autre point quelconque. En faisant coïncider les deux plans, on verra que $\lambda F + P^2 = 0$ est l'équation d'une surface circonscrite à $F = 0$ tout le long de son intersection avec $P = 0$.

Soient $\lambda F + P^2 = 0$ $\mu F + Q^2 = 0$ deux pareilles surfaces; la surface ayant pour équation $\mu(\lambda F + P^3) - \lambda(\mu F + Q^2) = 0$ passe par leur intersection Cette surface se réduit à 2 plans $P\sqrt{\mu} \pm Q\sqrt{\lambda} = 0$ ou en posant $\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} = \alpha$, $P \pm \alpha Q = 0$.

Ceci démontre d'une autre façon que les surfaces circonscrites à une troisième se coupent suivant deux courbes planes, en outre le rapport anharmonique des quatres plans $P = 0$ $Q = 0$ $P + \alpha Q = 0$ $P - \alpha Q = 0$ est $-\frac{\alpha}{\alpha}$ ou -1. Ainsi les plans des deux courbes planes forment avec les deux plans des courbes de contact un faisceau harmonique (§ 129).

VINGT-DEUXIÈME LEÇON

SYSTÈMES DE SURFACES DU SECOND ORDRE. SURFACES HOMOFOCALES

§ **327**. — I. Si deux surfaces du second ordre ne sont pas circonscrites tout le long d'une même courbe, de telle sorte qu'un plan les coupe en général en quatre points distincts, par leur courbe d'intersection et un autre point P, on peut faire passer une surface du second ordre et une seule.

Soient en effet $F = 0$ $\varphi = 0$ les équations des deux surfaces, x_0 y_0 z^0 les coordonnées du point P qui n'est pas supposé sur l'intersection, F_0 et φ_0 ce que deviennent F et φ quand on remplace $x y z$ par les coordonnées du point P.

L'équation $F_0 \varphi - \varphi_0 F = 0$ représente une surface du second ordre. Pour tout point commun aux deux surfaces $F = 0$ $\varphi = 0$, cette équation est satisfaite, car F et φ sont nuls; pour $x = x_0$ $y = y_0$ $z = z_0$ cette équation est encore satisfaite car elle donne l'identité $F_0 \varphi_0 - \varphi_0 F_0 = 0$. Elle représente donc bien une surface passant par l'intersection des deux surfaces données et par le point P.

Pour démontrer qu'il n'y en a qu'une seule, je vais démontrer que s'il y en avait deux M et M_1, tous leurs points seraient communs. En effet, soit A un point de M. Un plan passant par A et P couperait M suivant une conique C et M_1 suivant une conique C_1, C et C_1 ont cinq points communs, le point P et les quatre points où le plan considéré rencontre l'intersection des deux surfaces. Elles coïncident donc, et A qui est sur C est aussi sur C_1. Ce qui démontre la proposition. Toutes les surfaces passant par la courbe d'intersection de $F = 0$ $\varphi = 0$ sont dites former un *faisceau*.

Nous savons déjà que dans un faisceau il y a quatre cônes (§ 318), les sommets de ces quatre cônes forment (§ 317) un tétraèdre conjugué par rapport à toutes les surfaces du faisceau.

Pour distinguer ces faisceaux de surfaces d'un autre genre de faisceau dont nous nous occuperons bientôt, nous nommerons ceux dont nous nous occupons actuellement *faisceaux ponctuels*.

§ **328**. — II. Les deux points M et M' ou deux surfaces d'un faisceau rencontrant une droite quelconque, sont deux points correspondants de deux divisions en involution.

En effet, menons par la droite un plan ; il coupe chaque surface du faisceau suivant une conique passant par les quatre points où il rencontre la courbe commune à toutes les surfaces du faisceau, cette conique rencontre la droite aux deux points M et M', qui sont ainsi, d'après le théorème de Desargues, deux points correspondants d'une involution.

Corollaire. — Parmi les surfaces du faisceau, il y en a *deux* qui touchent une droite donnée. Ce sont celles qui passent par les points doubles de l'involution.

§ **329**. — III. Parmi toutes les surfaces d'un faisceau, il y en a *trois* qui touchent un plan donné P. Les points de contact sont les sommets du triangle conjugué commun à toutes les coniques suivant lesquelles le faisceau coupe le plan P.

Le plan P coupe le faisceau suivant des coniques passant par les quatre points d'intersection de P avec la courbe commune à toutes les surfaces du faisceau. Inversement, par l'une quelconque C des coniques passant par ces quatre points, on peut faire passer une surface du faisceau et une seule. Car il suffit, pour qu'une surface du faisceau contienne C, qu'elle en contienne un cinquième point.

Or parmi les coniques passant par quatre points ABCD, il y a les systèmes de droites (AB, CD) (AC, BD) (AD, BC). Les surfaces du faisceau qui passent par ces systèmes, touchent le plan P. Les points de contact de ces trois surfaces avec P sont les points de rencontre de

AB, CD, de AC, BD, de AD, BC qui sont (§ 224), les sommets du triangle conjugué commun à toutes les coniques passant par les quatre points. La propositions est donc démontrée.

§ **330**. — Les plans polaires d'un point A par rapport à toutes les surfaces d'un faisceau, passent par une droite fixe Δ. En effet, considérons les plans polaires du point A par rapport à deux surfaces S et S' du faisceau. Ils se coupent suivant une droite Δ. Coupons par le plan (A, Δ) on aura dans les deux surfaces deux coniques C et C', A aura pour polaire Δ par rapport à ces deux coniques. Ce sera donc l'un des trois points ABC ayant même polaire par rapport à toutes les coniques passant par les quatre points communs à C et C', (les autres points B et C sont sur Δ). Soit une troisième surface S'' du faisceau, coupée suivant une conique C'' par le plan A Δ, la polaire de A par rapport à C'' sera encore Δ, et par suite le plan polaire de A par rapport à S'' passera par Δ.

On voit aussi que le plan AΔ est tangent en A à celle des surfaces du faisceau qui passe par A.

§ **331**. — Nous allons tranformer par polaires réciproques les quatre propositions précédentes.

A toutes les surfaces d'un faisceau ponctuel, passant par tous les points communs à deux surfaces S et S', correspondent les surfaces d'un faisceau dit *tangentiel*; surfaces tangentes à tous les plans tangents communs aux deux surfaces ΣΣ' polaires réciproques de S et de S'. Les propositions corrélatives des quatre précédentes, s'appliqueront aux surfaces d'un faisceau tangentiel.

1° Parmi les surfaces d'un faisceau tangentiel, il y en a une et une seule qui touche un plan donné.

2° Les deux plans M et M' menés par une droite donnée à une surface d'un faisceau tangentiel, sont deux plans correspondants d'une involution. Parmi les surfaces il y en a deux touchant la droite donnée.

3° Parmi les surfaces d'un faisceau tangentiel, il y en a trois qui

passent par un point donné. Les plans tangents en ce point forment un trièdre conjugué par rapport à tous les cônes ayant pour sommet ce point et circonscrits aux différentes surfaces du faisceau.

4° Les pôles d'un plan fixe A par rapport à toutes les surfaces d'un faisceau tangentiel sont sur une droite fixe Δ. Δ rencontre A en un point, l'une des surfaces touche A en ce point.

5° Cette proposition : « Par l'intersection de deux surfaces du second ordre passent quatre cônes. Sur chaque génératrice il y a deux points de l'intersection. Ces quatre cônes du second ordre ont pour sommets quatre points formant un tètraèdre conjugué par rapport à toutes les surfaces du faisceau ponctuel. Trois arètes de ce tètraèdre, concourantes en un point A forment un trièdre conjugué par rapport à celui des cônes dont le sommet est A » donne la suivante par polaires réciproques.

« Les plans tangents communs à deux surfaces du second ordre touchent quatre coniques. Par chaque tangente à l'une des coniques passent deux plans tangents communs. Ces quatres coniques sont dans les quatre faces d'un tètraèdre conjugué par rapport à toutes les surfaces du faisceau tangentiel. Trois côtés de ce tètraèdre situées dans une face A forment un triangle conjugué par rapport à celle des coniques situées dans la face A ».

Focales. — Surfaces homofocales

§ **332**. — Etant donnée une surface du second ordre Σ, on peut considérer le faisceau tangentiel formé des surface tangentes à tous les plans tangents communs à Σ et au cercle de l'infini. Les surfaces de ce faisceau sont dites *homofocales* à Σ. Voyons ce que deviennent dans ce cas les propositions des paragraphes précédents.

1° Parmi toutes les surfaces d'un faisceau de surfaces homofocales il y en a une seule touchant un plan donné.

2° Les plans menés par une droite donnée, tangents à une des surfaces du faisceau sont deux plans correspondants d'une involution.

Comme parmi ces plans il y a les deux plans tangents au cercle de l'infini menés par la droite (*Plans isotropes*), on en conclut que les plans doubles du faisceau, conjugués par rapport à ces plans, sont rectangulaires. Ces plans doubles sont les plans tangents aux deux surfaces du faisceau qui touchent la droite. Ainsi les deux surfaces du faisceau qui touchent une droite donnée ont leurs plans tangents aux points où elles touchent la droite rectangulaire. On conclut aussi de ce qui précède, que les deux points de contact sont toujours réels. En effet, sans cela les plans tangents seraient imaginaires conjugués, et deux plans imaginaires conjugués ne sauraient être rectangulaires.

3° Parmi les surfaces homofocales, il y en a trois qui passent par un point donné A. Leurs plans tangents en ce point sont conjugués par rapport à tous les cônes dont le sommet est en ce point, et circonscrits aux différentes surfaces du faisceau. Comme l'un de ces cônes circonscrits est isotrope, puisque l'une des surfaces se réduit au cercle de l'infini, ces trois plans sont *rectangulaires*. Ce sont, dès lors, les *plans principaux* communs à tous les autres cônes. Si on considère un plan tangent à toutes les surfaces ayant pour sommet le point A considéré, il touche tous ces cônes et en particulier le cône isotrope. On en conclut que tous ces cônes ont mêmes lignes focales (1). Ils sont homofocaux.

On voit aussi, comme dans le cas précédent, que les trois surfaces qui passent par un point A sont réelles, car leurs plans tangents étant rectangulaires sont réels ; et comme chaque plan n'est touché que par une seule surface, la réalité du plan entraîne celle de la surface.

Nous avons donc démontré que : 1° *Trois surfaces homofocales se coupent à angle droit* ; 2° *Les cônes ayant pour sommet un point* A *et circonscrites à toutes les surfaces homofocales sont homofocaux, et ont tous pour plans principaux les plans tangents aux trois surfaces homofocales qui passent par* A.

Il faudrait modifier un peu ces résultats si la surface Σ était tangente au plan de l'infini ; nous supposerons jusqu'à nouvel ordre qu'il n'en est pas ainsi.

4° Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport à toutes nos sur-

(1) Une ligne focale d'un cône est l'intersection de deux plans isotropes tangents à ce cône.

faces est une droite fixe Δ, Δ rencontre le plan fixe au point P de contact de ce plan avec celle des surfaces qui le touchent. Le point à l'infini sur Δ est conjugué du plan fixe par rapport au cercle de l'infini ; donc la droite Δ est perpendiculaire au plan fixe

5° Les plans tangents communs à toutes nos surfaces touchent quatre coniques. L'une d'elles est le cercle de l'infini. Ce plan a pour pôle le centre O de chacune des surfaces. Toutes nos surfaces sont donc concentriques et leur centre commun est l'un des sommets du tétraèdre conjugué commun. Les arètes de ce tétraèdre situées dans le plan de l'infini forment un triangle conjugué par rapport à la conique située dans ce plan, c'est-à-dire au cercle de l'infini, par conséquent les plans passant par O et par ces arètes forment un trièdre trirectangle. Ces plans sont, d'après le § 331, conjugués par rapport à toutes les surfaces, ce sont donc *leurs plans principaux*. Toutes ces surfaces ont *mêmes plans principaux*. Les trois autres coniques par lesquelles passent les plans tangents communs sont dans ces trois plans; on les nomme les *focales* du système.

Propriétés des Focales

§ **333**. — 1° Les points des focales sont les points tels que le cône isotrope ayant l'un d'eux pour sommet soit bitangent à toutes les surfaces du faisceau, et par suite les coupe suivant deux courbes planes.

En effet, les plans menés par la tangente à la focale en un point M tangent à toutes les surfaces du faisceau, sont aussi tangents au cercle de l'infini, et par suite au cône isotrope ayant M pour sommet. Soient A et A′ les points de contact de ces plans avec une surface du faisceau, en A et A′ le cône isotrope et la surface ont même plan tangent ; la proposition se trouve démontrée, le cône isotrope et la surface se coupent suivant deux courbes planes (§ 322). On peut remarquer que la droite A A′ qui joint les points de contact des deux plans tangents est perpendiculaire au plan principal contenant la focale. Cela résulte de ce que la droite AA′ est conjuguée de

la tangente en M à la focale. Cette droite se nomme la *directrice* correspondant au point M.

Réciproquement, si le cône isotrope ayant pour sommet un point M est bitangent à l'une des surfaces du faisceau, le point M est sur l'une des focales, car les deux plans tangents communs au cône isotrope et à la surface, étant tangents à deux surfaces du faisceau (la surface proposée et le cercle de l'infini) le sont à toutes. Soient A et B les points où ces plans touchent le cercle de l'infini, C et D les points où ils touchent l'une des surfaces Σ du faisceau, A et C sont sur une des génératrices du cône isotrope de sommet M, B et D sur une autre. La droite MAC est l'une des génératrices de la développable circonscrite à toutes les surfaces du faisceau, MBD en est une autre, M est donc un point où passent deux génératrices de cette développable. Or le lieu des points doubles de la développable circonscrites à deux surfaces du second ordre est l'ensemble des quatre coniques contenues sur cette développable. (De même que les plans bitangents à l'intersection de deux surfaces du deuxième ordre sont tangents à l'un des quatre cônes du second ordre passant par cette intersection (§ 315). La proposition est donc démontrée.

§ **334**. — 2° Le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une surface du second ordre est l'ensemble de ses trois focales.

On sait qu'une surface de révolution coupe le plan de l'infini suivant une conique bitangente au cercle de l'infini. Un cône de révolution est par suite bitangent (le long de deux génératrices) au cône isotrope de même sommet. Si le cône de révolution est circonscrit à la surface S le long d'une courbe C, et tangent au cône isotrope suivant deux génératrices Δ, Δ', ces deux génératrices coupent C en deux points, où le cône isotrope est tangent à la surface S; le cône étant ainsi bitangent à S, son sommet est sur l'une des focales (§ 332).

Réciproquement soit M un point sur l'une des focales, et considérons le cône T du sommet M circonscrit à la surface S. Le cône isotrope est bitangent à S en deux points, nécessairement situés sur la courbe de

contact du cône T, car celle-ci est le lieu des points de contact des plans tangents à S passant par M. En ces deux points, le cône T et le cône isotrope ont même plan tangent, dès lors ils sont bitangents le long des génératrices passant par ces deux points, et par suite le cône T est de révolution.

§ 335. — Nous avons supposé que les surfaces du faisceau n'étaient pas tangentes au plan de l'infini, disons en quelques mots ce qui arrive dans ce cas.

Prenons d'abord un faisceau ponctuel quelconque ; nous avons vu que si la courbe d'intersection présente un point double, le cône ayant pour sommet ce point et passant par la courbe est du deuxième degré. Au point double toutes les surfaces du faisceau ont même plan tangent (le plan des tangentes à la courbe au poiut double). En dehors de ce point, il n'y a plus que deux cônes du deuxième degré passant par la courbe. En transformant par polaires réciproques, on a des surfaces incrites dans une développable, ayant un plan tangent double, c'est-à-dire un plan qui la touche suivant deux génératrices. Les surfaces du faisceau touchent ce plan en un point fixe (point de rencontre de ces deux génératrices). Alors, hors du plan de ces deux génératrices, il n'y a plus que deux coniques et dans ce plan une troisième. Si cette troisième est le cercle de l'infini, on a des surfaces homofocales tangentes au plan de l'infini (*paraboloïdes homofocaux*). Il n'y a plus que *deux* focales qui touchent aussi le plan de l'infini, c'est-à-dire sont des *paraboles*.

§ 336. — Dans le cas général, on peut voir d'un peu plus près ce que sont les focales.

Considérons deux plans principaux contenant chacun une focale. Leur intersection est naturellement un plan de symétrie pour chacune de ces courbes. Soit X'X cette intersection, elle rencontre la première focale en A et A', la deuxième en B et B', A et A' sont les sommets de la première focale, B et B' étant sur une focale, le cône de sommet B' isotrope est bitangent à toutes les surfaces du faisceau et en particulier

à la première focale. Donc B est un foyer, de même que B′. Ainsi la première focale a pour sommet AA′, pour foyers BB′. De même B et B_1 sont les sommets, A et A′ les foyers de la deuxième focale.

Soient F_1 F_2 F_3 les trois focales, A A′ les sommets de F_1 situés sur OX, BB′ ceux de F_2, $A_1A'_1$ les sommets de F_1, $C_1C'_1$ ceux de F_3 situés sur OY, $B_2B'_2$. $C_3C'_3$, ceux de F_2 et F_3 situés sur OZ. Si AA′ est l'axe focal de F_1 ses foyers B et B′ sont réels, donc ses autres foyers C_1C_1' sont imaginaires. On verra aisément en continuant ce raisonnement, que des trois focales deux seulement sont réelles (l'autre ayant 4 sommets imaginaires), une seule a 4 sommets réels (ellipse), l'autre deux seulement (hyperbole).

VINGT-TROISIÈME LEÇON

SUR LES CUBIQUES GAUCHES

§ **337.** — Nous avons vu que deux surfaces du second ordre ayant une génératrice commune, avaient en commun une courbe, coupée en trois points par un plan. Cette courbe a reçu le nom de *cubique gauche.* Voici quelques propriétés simples de ces courbes :

1° *Le cône ayant pour sommet un point quelconque de la courbe, et contenant cette courbe est un cône du second ordre.*

En effet, un plan passant par ce point S coupe la cubique en deux autres points A et B, il coupe dès lors le cône suivant deux génératrices SA, SB, ce qui démontre la proposition.

Plan osculateur. — La tangente en S à la cubique est l'intersection des plans tangents en ce point à deux surfaces du second ordre qui la contiennent. Cette tangente est évidemment sur le cône de sommet S ; car c'est la position limite de la génératrice SA quand A vient en S ; soit T cette tangente, B un autre point de la cubique. Le plan limite du plan TB, ou du plan de ST et de SB quand B vient en A c'est évidemment le plan tangent au cône suivant ST. Ce plan se nomme le plan osculateur en S. Les trois points où il coupe la cubique sont confondus en S.

§ **338.** — 2° *Six points dont quatre ne sont pas dans un même plan, déterminent une cubique gauche.*

Soient ABCDEF les six points ; par les cinq droites concourantes en A, AB AC AD AE AF, ont peut faire passer un cône du second ordre, de sommet A. De même par les cinq droites BA BC BD BE BF on peut

faire passer un cône du second ordre de sommet B. Ces deux cônes se coupent suivant une cubique gauche. Il n'y en a pas d'autre passant par les six points, car toute cubique gauche passant par les six points se trouve à la fois sur les deux cônes dont il vient d'être question.

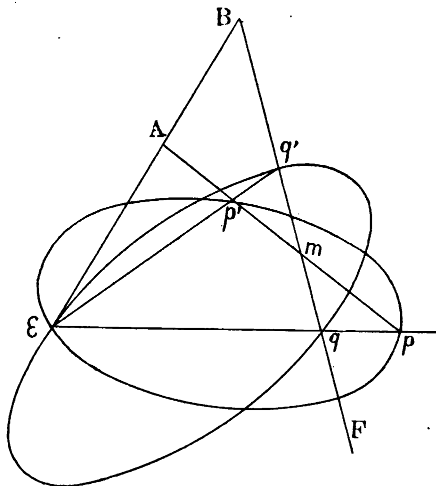
Remarque : Plusieurs points peuvent être confondus, alors au lieu de deux points, on a une tangente et son point de contact.

§ **339.** — 3° Je nommerai *corde*, ou *sécante double* d'une cubique gauche une droite qui la coupe en *deux* points (réels, imaginaires ou confondus). Par la cubique et une sécante double passent évidemment deux cônes du second ordre ayant pour sommets les points de rencontre de la sécante double avec la cubique. On verra, comme au § 327, que parmi les surfaces passant par la sécante double et la cubique, il y en a une et une seule passant par un point donné.

§ **340.** — 4° Le *cône ayant pour sommet un point quelconque et contenant la cubique est du troisième ordre*, car un plan passant par le sommet coupe la cubique en trois points, et le cône suivant trois génératrices. La projection de la cubique sur un plan est donc du troisième ordre. Je vais démontrer qu'elle *a un point double* et donner le moyen de le construire. Je projetterai la figure d'un point O quelconque sur un plan P. Les sommets de deux cônes contenant la courbe seront projetés en A et B ; ω étant le point où la ligne des sommets rencontre P, les bases des cônes sur le plan P seront deux coniques passant par ω, et que nous nommons C et C'. Un plan passant par la ligne des sommets coupe P suivant une droite ω L rencontrant C en p, C' en q. Le plan sécant coupe les deux cônes suivant les génératrices projetées en Ap, Bq ; ces droites se rencontrent en m, projection d'un point de l'intersection.

Ap rencontre de nouveau C en p' ; joignons ω p' qui coupe C' en un point q'. Si qq' passait par B, le nouveau plan sécant ayant pour trace $\omega p'q'$ donnerait le même point m, qui serait ainsi la projection de deux points de l'intersection. Or la droite pp' passant par un point fixe

A, ωp, $\omega p'$ sont en involution (§ **98**) (le théorème démontré alors pour le cercle s'applique aussi aux coniques) ωp, $\omega p'$ étant en involution, la droite qq', joignant les points où les rayons rencontrent



l'autre conique, passe par un point fixe F, (on le déterminera facilement en construisant deux positions de qq'). Joignons FB, et prenons q et q' sur FB, alors les droites joignant ω à q et q' seront deux rayons de l'involution de tout à l'heure et pp' passera par A. Le point m correspondant sera donc bien un point double.

§ **341**. — Théorème. — Les coordonnées x y z d'un point d'une cubique gauche peuvent se mettre sous la forme.

$$(1) \qquad x = \frac{f(t)}{\varphi(t)} \quad y = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)} \quad z = \frac{f_2(t)}{\varphi(t)}$$

$f\, f_1\, f_2$ et φ étant des polygones en t, du degré 3 en plus.

En effet, une surface du second degré ayant pour génératrice l'axe des z est représentée par équation de la forme.

$$x\,\mathrm{P} = y\,\mathrm{Q}$$

P et Q étant des polygones du premier degré, car l'équation devant

être satisfaite quel que soit z quand $x = o$ $y = o$, tous les termes doivent contenir un facteur soit x soit y.

Une autre surface passant par l'axe des z a une équation de la même forme:

$$x\,P' = y\,Q'$$

posons $y = tx$ les deux équations précédentes donnent

$$P = tQ$$
$$P' = tQ'$$

ces équations avec $y = tx$ permettront de calculer $x\ y\ z$ en fonction de t, d'ailleurs si l'on a un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

on obtient les points d'intersection du plan avec la courbe en remplaçant $x\ y\ z$ par leurs valeurs en fonction de t, ce qui donne l'équation

$$Af + Bf_1 + Cf_1 + D\varphi = 0$$

et comme un plan ne doit couper la courbe qu'en trois points, cette équation doit être du troisième degré et $t, f f_1, f_2\ \varphi$ doivent donc être au plus du troisième degré.

§ **342**. — *Réciproquement*, des équations de la forme précédente représentent une cubique gauche, c'est-à-dire qu'en faisant varier t dans les formules, on obtient les différents points d'une telle courbe.

Les formules (1) peuvent être remplacées par les suivantes:

(1) $$\rho\, x = f(t) \quad \rho\, y = f_1(t) \quad \rho\, z = f_2(t) \quad \rho = \varphi(t)$$

Soient $u\ v\ w\ h$ des coflicients indéterminés, on aura

(3) $$\rho\,[\,ux + vy + wz + h] = u f(t) + v f_1(t) + w f_2(t) + h\,\varphi(t)$$

Le second membre est un polynôme du troisième degré en t; profitons de l'indétermination de $u\ v\ w\ h$, pour annuler le coefficient de t^2 celui de t et le terme indépendant; la relation (3) donnera alors

(4) $$\rho\,(ux + vy + wz + h) = At^3$$

A étant un certain coefficient qui ne peut être nul sans quoi le plan $ux + vy + wz + h = 0$ contiendrait la courbe.

Pour annuler le coefficient de t^3 celui de t est le terme indépendant. il faut écrire trois équations sans second membre à quatre inconnues $u\ v\ w\ h$, cela ne détermine pas complètement ces quatres inconnues, mais donne en général des quantités qui leur sont proportionnelles.

On pourra de même en choisissant autrement $u\ v\ w\ h$ ne laisser subsister dans (3) que le terme en t^2, on aura:

$$(5) \qquad \rho\,(u'x + v'y + w'z + h') = Bt^2$$

de même on pourra déterminer $u''\ v''\ w''\ h''$ de façon que

$$(6) \qquad \rho\,(u''x + v''y + v''z + h') = Ct$$

et enfin $u'''\ v'''\ w'''\ h'''$ de telle sorte que

$$(7) \qquad \rho\,(u''x + v'''y + u'''z + h''') = D$$

En faisant disparaître cette fois tous les termes du second membre de (3) tous les termes sauf le terme indépendant.

Les équations (4) (5) (6) et (7) résolues par rapport à $t^3\ t^2\ t$ et 1 donnent:

$$(8) \qquad t^3 = \rho P \quad t^2 = \rho Q \quad t = \rho R \quad 1 = \rho S$$

P Q R S étant des polynomes du premier degré. Entre ces quatre polynomes, il n'y a aucune relation de la forme.

$$\lambda P + \mu Q + \nu R + \theta S = 0 \quad (\textit{identiquement})$$

$\lambda\ \mu\ \nu\ \theta$ étant des constantes non toutes nulles, car on aurait alors

$$\lambda t^3 + ut^2 + \nu t + \theta = 0$$

et t ne pourrait pas prendre une valeur quelconque.

Divisant les trois premières équations (8) par la dernière, on obtient:

$$(9) \qquad t^3 = \frac{P}{S} \quad t^2 = \frac{Q}{S} \quad t = \frac{R}{S}$$

formules qui nous seront d'une grande utilité dans la suite.

En éliminant de différentes façons t entre les relations (9), on a:

(10) $$QR = PS, \quad R^2 = QS, \quad Q^2 = PR.$$

Les deux premières surfaces ont en commun l'intersection des deux plans $R = 0$ $S = 0$, la première et la troisième passent par l'intersection des plans $Q = 0$ $P = 0$. La seconde et la troisième contiennent la droite suivant laquelle se coupent les plans $R = 0$ $Q = 0$. Il est clair dès lors que la courbe est une cubique gauche. Toutes les surfaces ayant pour équation.

(11) $$\alpha(QR - PS) + \beta(R^2 - QS) + \gamma(Q^2 - PR) = 0$$

contiennent la courbe. On obtient cette équation en ajoutant les équations (10) après les avoir multipliées par des constantes quelconques. $\alpha \beta \gamma$.

Théorie des plans osculateurs

§ **343**. — Considérons une cubique gauche, définie par les équations (1) et soit θ la valeur de t qui correspond à un certain point M de la courbe. Si l'on coupe la surface par le plan osculateur en M, on doit trouver, pour l'équation qui donne les valeurs de t correspondant aux points où ce plan coupe la courbe, une équation ayant trois racines égales à θ, c'est-à-dire l'équation : $(t - \theta)^3 = o$.

ou $$t^3 - 3t^2\theta + 3t\theta^2 - \theta^3 = o$$

Or le plan ayant pour équation :

(12) $$P - 3\theta Q + 3\theta^2 R - \theta^3 S = o$$

fournit précisément cette équation quand on y remplace PQRS par leurs valeurs tirées des formules (9). *L'équation (12) représente donc le plan osculateur.*

§ **344**. — Proposons-nous de résoudre le problème suivant : *Mener par un point* A *des plans osculateurs à la courbe.*

Soit θ la valeur de t correspondant à l'un des points de contact M cherché : désignons par P_0 Q_0 R_0 S_0 ce que deviennent P Q R S quand

on y remplace $x\,y\,z$ par les coordonnées du point A. Puisque le point A doit contenir le plan osculateur en M, ses coordonnées doivent satisfaire à l'équation (12) on doit donc avoir :

(13) $$P_0 - 3\,\theta\,Q_0 + 3\,\theta^2\,R_0 - \theta^3\,S_0 = 0$$

Ou si l'on pose $\theta = \frac{P}{S}$, $\theta^2 = \frac{Q}{S}$ $\theta^3 = \frac{R}{S}$,
on voit que l'on obtient l'équation (13) en substituant ces valeurs dans l'équation :

(14) $$SP_0 - 3\,RQ_0 + 3\,QR_0 - PS_0 = 0$$

En sorte que le plan représentant l'équation (14) rencontre la cubique en trois points dont les θ sont donnés par l'équation (13). Ce sont donc bien trois points tels que leur plan osculateur passe par A.

Le plan représenté par l'équation (14) passe lui-même par A.

En effet, si l'on substitue dans son équation les coordonnées du point A, on obtient :

$$S_0P_0 - 3\,R_0Q_0 + 3\,Q_0\,R_0 - P_0S_0 = 0$$

qui est une identité.

Le plan représenté par l'équation (14) se nommera le plan focal de A. A sera dit son foyer. On voit que le plan focal de A passe par A.

§ **345**. — Théorème. —Si le plan focal d'un point A passe par un point B, le plan focal de B passe par A.

En effet soient P_1 Q_1 R_1 S_1 ce que deviennent P Q R S quand on y remplace $x\,y\,z$ par les coordonnées du point B. En exprimant que l'équation (14) est satisfaite par les coordonnées du point B, ce qui exprime que le plan focal de A passe par B, on a :

(15) $$S_1P_0 - 3\,R_1Q_0 + 3\,Q_1R_0 - P_1S_0 = 0$$

pour écrire que le plan focal de B passe par A, il faudrait de même écrire l'équation :

(16) $$S_0P_1 - 3\,R_0Q_1 + 3\,Q_0R_1 - P_0S_1 = 0$$

Or cette dernière équation n'est que l'équation (15) où tous les termes ont été changés de signe. La même relation exprime donc à la fois que le plan focal de A passe par B et que celui de B passe par A.

§ **346**. — THÉORÈME. — Les plans focaux de tous les points d'une droite fixe D passent par une droite fixe Δ qui est dite conjuguée de D. Les plans focaux des différents points de Δ passent par D.

Soient P et Q deux points de D, α et β leurs plans focaux qui se coupent suivant une droite Δ, soit M un point de Δ, M étant à la fois dans le plan focal de P et dans celui de Q, le plan focal de M passe par P et Q, et contient la droite D ; soit M′ un point de D. Le plan focal de M passe par M′, donc le plan focal de M′ passe par M ; le plan focal d'un point quelconque de Δ passe donc par D et le plan focal d'un point quelconque M′ de D passe par un point quelconque M de Δ, c'est-à-dire par Δ.

§ **347**. — THÉORÈME. — Le rapport anharmonique de quatre plans passant par une droite D est égal au rapport anharmonique de leurs quatre foyers situés, d'après le théorème précédent, sur la droite Δ.

En effet, le foyer d'un plan étant dans ce plan, les quatre foyers des quatre plans passant par D sont les quatre points où ces plans coupent Δ, et le rapport anharmonique de ces quatre points est bien égal à celui des quatre plans (§§ **19** et **129**).

Cette démonstration ne s'applique plus si D et Δ coïncident ; ceci arrive quand on prend pour D une droite située dans le plan focal A d'un de ces points, donc le plan focal d'un point quelconque de D passera par A et contiendra la droite D.

Le théorème est encore vrai dans ce cas ; on peut le démontrer en supposant que Δ vienne coïncider avec D, ou encore par une vérification directe que nous ne ferons pas pour abréger.

Les droites D et Δ sont dites *conjuguées*. Si D coïncide avec Δ D est dite conjuguée d'elle-même. L'ensemble des droites conjuguées d'elles-mêmes est donc tel que toutes les droites de cet ensemble passant par un même point soient dans un même plan, nommé le plan focal de ce point. Un tel ensemble se nomme un *complexe linéaire*.

Nous avons maintenant un mode de correspondance entre un point et un plan, analogue à la correspondance entre un point et son

plan polaire, mais en différant par ce fait que le plan correspondant d'un point passe par ce point. On peut donc, au moyen de ce nouveau mode de correspondance, former des figures corrélatives. Cela sera surtout commode pour étudier les développables formées par l'ensemble des plans osculateurs à une cubique gauche.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON

NOTIONS SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE ET EN PARTICULIER SUR LES SURFACES RÉGLÉES.

§ **348**. — Nous n'étudierons pas les surfaces du troisième ordre, nous bornant à des considérations générales sur le nombre et la disposition des droites qui y sont situées. Nous étudierons cependant avec quelques détails le cas où la surface est engendrée par une droite.

Nous ne démontrerons pas ici qu'il existe des droites sur une surface du troisième ordre, nous bornant à remarquer qu'une droite définie par les équations

$$x = mz + p \qquad y = nz + q$$

de ses deux projections sur les plans de coordonnées sera sur la surface d'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

si l'égalité $$F(mz + p, \quad nz + q, \quad z) = 0$$

a lieu, quel que soit z, or cette équation du troisième degré en z présente quatre termes; en égalant à zéro les quatre coefficients, on a quatre équations à quatre inconnues $m\ n\ p\ q$, qui permettront en général de déterminer des valeurs pour ces quatre inconnues.

Supposons donc que l'on ait trouvé une droite sur une surface du troisième ordre. Je vais faire voir comment cela permet d'en déduire toutes les autres.

Prenons cette droite pour axe des x; L'équation de la surface

devra être satisfaite par $z = o$ $y = o$ quel que soit x. Tous les termes contiendront donc soit z, soit y, et l'équation prendra la forme

(1) $$y\,\varphi\,(x, y, z) - z\,\psi\,(x, y, z) = 0$$

φ et ψ étant des polynomes du second degré.

Un plan passant par l'axe des x a une équation de la forme $z = my$; en remplaçant z par my dans l'équation précédente, elle devient :

(2) $$y\,\varphi\,(x, y, my) - my\,\psi\,(x, y, my) = 0$$

divisons tout par y on a :

(3) $$\varphi\,(x, y, my) - m\,\psi\,(x, y, my) = 0$$

c'est l'équation d'une courbe du deuxième ordre, qui est la projection sur le plan des $x\,y$, de la section de la surface par le plan.

Soit $\varphi\,(x, y, z) = \alpha\,x^2 + \alpha'\,y^2 + \alpha''\,z^2 + 2\,\beta\,yz + 2\,\beta'\,zx + 2\,\beta''\,xy + 2\,\gamma\,x + 2\,\gamma'\,y + 2\,\gamma''\,z + \delta.$

Puis $\Psi\,(x, y, z,) = \mathrm{A}\,x^2 + \mathrm{A}'\,y^2 + \mathrm{A}''\,z^2 + 2\,\mathrm{B}\,yz + 2\,\mathrm{B}'\,zx + 2\,\mathrm{B}'\,xy + 2\,\mathrm{C}\,x + 2\,\mathrm{C}'\,y + 2\,\mathrm{C}''\,z + \mathrm{D}.$

en écrivant explicitement l'équation (3) φ et Ψ étant remplaçés par ces valeurs, on aura l'équation de la conique. Pour écrire que cette conique est un système de deux droites, il faut écrire entre les coefficients de l'équation (3) la relation du § **302**. Il est facile alors de voir que cette équation devient une équation du cinquième degré en m ; d'où cette proposition : Par une droite située sur une surface du troisième ordre on peut faire passer cinq plans coupant la surface chacun suivant deux autres droites.

La droite donnée et les dix droites contenues dans les cinq plans, cela fait onze droites ; mais ce ne sont pas les seules sur la surface.

§ **349**. — Considérons en effet l'un des cinq plans ; il coupe la sur-surface suivant trois droites. Par chacune de ces trois droites on peut faire passer quatre autres plans coupant la surface chacun suivant deux droites ; cela fait 8 autres droites pour chacune des trois droites

primitives ; en tout 24 droites, et par suite 27 droites en comptant les trois premières. Ces 27 droites sont en général distinctes, car si une des 24 droites se retrouvait deux fois, c'est qu'elle rencontrerait deux des trois droites primitives ; comme elles ne sont pas dans le même plan, elle se rencontreraient au même point et la surface présenterait un point singulier, ce qui n'a pas lieu en général.

Il ne peut pas y avoir d'autres droites que celles-là, car une droite quelconque de la surface ne peut couper le plan des trois droites primitives que sur l'une d'elles ; toutes les droites de la surface rencontrent donc l'une de ces trois là.

§ **350**. — Supposons maintenant qu'une surface du troisième ordre soit réglée. Soit M un point situé sur une génératrice. Un plan passant par la génératrice coupe en outre la surface suivant une conique. Au point où cette conique rencontre la génératrice, le plan est nécessairement tangent, car le plan tangent est déterminé par la génératrice et la tangente à la conique en ce point.

Le plan tangent en M coupe donc la surface suivant la génératrice et une conique passant par M. Cette conique coupe la génératrice considérée en un autre point A. Si le point A n'était pas un point singulier de la surface, le plan tangent en A serait encore le plan de la conique.

Or cela ne peut être, car comme on a vu au (§ **264**), en deux points distincts d'une génératrice d'une surface réglée, il y a nécessairement deux plans tangents distincts. Donc A est un point singulier, et comme il ne saurait y avoir une infinité de points singuliers sur une génératrice, A est un point fixe sur la génératrice quand M varie ; c'est-à-dire que les plans passant par la génératrice coupent tous la surface suivant une conique passant par A.

Un plan passant par A coupera alors la surface suivant une cubique ayant en A un point multiple, puisque la tangente sera indéterminée, de sorte que toute droite passant par A coupera la surface en deux points confondus en A.

Le lieu des points analogues à A est une ligne double de la surface

rencontrant en un point chaque génératrice. Cette ligne est nécessairement une droite. Sans quoi si A et B étaient deux points sur cette ligne, la droite AB couperait la surface en deux points confondus en A, et deux en B, total quatre points, ce qui est impossible, la surface n'étant que du troisième ordre. Désignons cette droite par Δ.

§ **351**. — Considérons maintenant quatre génératrices ABCD, on peut, d'après le § 275, trouver deux droites rencontrant ces quatre génératrices, une de ces droites est Δ, l'autre est donc une certaine droite réelle D. Cette droite rencontrant la surface en quatre points sur les droites ABCD est aussi située sur elle. Sur la surface il y a donc deux droites D et Δ, l'une simple l'autre double. Soit de plus C une conique obtenue en coupant la surface par un plan tangent, conique qui rencontre Δ en un point A, comme nous l'avons vu. On pourra considérer la surface comme engendrée par une droite rencontrant D, Δ et la conique C.

Par chaque point P de Δ passent deux génératrices ; on les obtient en coupant le cône de sommet P et de base C par le plan du point P et de la droite D. Par chaque point Q de D ne passe au contraire qu'une génératrice. On l'obtient en coupant le cône de sommet Q et de base C, par le plan de Q et de Δ. Mais ce plan coupe le cône suivant la droite AQ qu'il faut exclure, il ne reste donc qu'une génératrice passant par Q.

§ **352**. — Soit P un point de la droite Δ, deux droites passent par P, qui coupent D, l'une en Q, l'autre en Q'. Je dis que Q et Q' sont deux points correspondants d'une involution.

Projetons en effet la figure sur le plan de la conique C parallèlement à Δ; tout point de Δ (et en particulier P) se projette en A, Q et Q se projettent en q et q' sur la projection D_1 de D. Les droites PQ PQ' coupent le plan de la conique en m et m', et la droite mm' étant à la fois dans le plan de la conique et dans le plan QPQ' qui contient D, rencontre D en un certain point ω, qui n'est autre que le point où le

plan fixe de la conique rencontre la droite fixe D, ω est donc un point fixe. mm' passant par un point fixe, les droites Am Am' ou ce qui est la même chose Aq Aq' forment une involution ; donc q et q' forment une involution sur D_1 et par suite les points Q et Q' dont ils sont les projections, forment une involution sur D (*ce qu'il fallait démontrer*).

On voit que si R et S sont les deux points doubles de cette involution, les génératrices passant par R et S sont doubles.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DU CALCUL DES IMAGINAIRES

§ **353**. — Dans la première partie de la leçon, nous avons présenté la théorie des imaginaires au point de vue abstrait. Nous allons nous placer ici à un point de vue tout différent, en faisant usage d'une représentation due à Cauchy.

Considérons deux axes rectangulaires ox oy, et M un point du plan. Le point est déterminé par ses coordonnées x et y ; il l'est aussi par la longueur OM (quantité toujours positive) et l'angle de OM avec OX, angle pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$. Nous nommerons ρ la longueur OM et ω l'angle XOM (avec son signe).

Deux segments AB et CD sont dits *équipollents* quand ils sont égaux parallèles et de même sens. Nous écrirons.

$$AB \doteq CD$$

pour écrire que AB est équipollent à CD.

Comme deux droites parallèles à une troisième et de même sens sont entre elles parallèles et de même sens, les relations

$$AB \doteq CD, \quad AB \doteq EF$$

entraînent la suivante $CD \doteq EF$

Un segment AB peut être représenté par ces deux projections sur OX et sur OY. Si l'on mène par l'origine un segment OM équipollent à AB, les coordonnées du point M seront les projections de OM (ou de AB sur les axes). On voit que nous ne tenons pas compte de la position du segment dans le plan, mais seulement de sa grandeur et de sa direction.

On peut aussi représenter le segment par les valeurs de ρ et de ω définies ci-dessus. ρ s'appelle *le module,* ω *l'argument* du segment OM ou du segment AB équipollent.

Nous allons maintenant définir sur les segments, certaines opérations analogues aux opérations algébriques. Nous désignons, pour abréger les segments par de simples lettres.

§ **354.** — *Addition.* — Soient $a\ b\ c\ d$ plusieurs segments. Prenons un point quelconque A puis par A menons AB $\triangleq a$, puis par B, Bc $\triangleq b$ puis CD $\triangleq c$ et enfin DE $\triangleq d$; le segment AE sera dit la somme géométrique des segments $a\,b\,c\,d$, si, au lieu de partir de A on était parti d'un autre point A', on eut obtenu une figure A' B' C' D' E' qui n'eût été que la figure ABCDE transportée parallèlement à elle-même. On eût donc bien obtenu un segment A'E' équipollent à AE.

Les propriétés de l'addition sont les mêmes que pour les sommes ordinaires. Ainsi l'on a :

$$a + b \triangleq b + a$$

en effet soit AB $\triangleq a$ BC $\triangleq b$, on a par définition AC $\triangleq a + b$ d'autre part achevons le parallèlogramme ABCD. Les côtés opposés d'un parallèlogramme étant équipollents, on a :

$$\text{AD} \triangleq \text{BC} \triangleq b \text{ et DC} \triangleq \text{AB} \triangleq a,$$

mais pour construire $b + a$, il faut justement mener AD $\triangleq b$ et DC $\triangleq a$, donc AC est bien $b + a$, ce qui démontre la proposition.

On a aussi : $a + b + c \triangleq a + (b + c)$.
en effet prenons AB $\triangleq a$ BC $\triangleq b$ CD $\triangleq c$, on aura par définition :

$$\text{AD} \triangleq a + b + c$$

Mais d'autre part on peu parvenir au point D comme il suit, on a : AB $\triangleq a$, puis BD $\triangleq b + c$ dont AD est bien équipollent à $a + b + c$:

Un segment nul n'a aucun effet dans l'addition, on a :

$$a + o \triangleq a$$

Je vais encore démontrer que l'équipollence

$$a + b \doteq a + c$$

entraîne

$$b \doteq c$$

en effet prenons AB $\doteq a$ BC $\doteq b$ BD $\doteq c$.

La première équipollence exprime que AC est égal et parallèle à AD, mais alors C coïncide avec D et par suite BC avec BD ce qu'exprime précisément la seconde équipollence.

On sait que toutes les propriétés de l'addition peuvent se déduire de celles que nous venons de démontrer.

Soit encore AB $\doteq a$ BC $\doteq b$ CD $\doteq c$.

Si l'on projette les points ABCD parallèlement à une droite sur une droite quelconque en $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, on aura (§ **100**)

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha = o$$

ou

$$\alpha\delta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta$$

c'est-à-dire que la projection $\alpha\beta$ de la somme géométrique AD des segments a b c d est égale à la somme algébrique des projections de ces segments.

§ **355**. — *Soustraction*. — Soit $a \doteq b + c$, prenons AB $\doteq b$ BC $\doteq c$ on aura par définition AC $\doteq a$; dans les mêmes conditions nous écrirons $c \doteq a - b$ ou $b \doteq a - c$; la soustraction est donc définie comme l'opération inverse de l'addition. Mais ce qu'il y a d'important, c'est que la soustraction se ramène immédiatement à l'addition. En effet, soit c' le segment égal parallèle à c mais de sens contraire ; dans la même figure que tout à l'heure on aura : AC $\doteq a$, CB $\doteq c'$ donc AB sera équipollent à $a + c'$ donc :

$$b \doteq a + c' \text{ mais on a } b \doteq a - c$$

donc la soustraction de c équivaut à l'addition de c' égal et de sens contraire.

La théorie précédente s'applique sans modification sensible, au cas des segments non situés dans un même plan. Mais pour la multiplication il n'en sera plus de même.

J'appellerai segment *unitaire* un segment dont le module est égal à l'unité. Il est complètement défini par son argument.

Un segment parallèle à ox sera dit une quantité réelle ; si ce segment est du sens ox la quantité est dite positive. L'argument est alors zéro ou un multiple de 2π, si le segment est du sens opposé à ox, l'argument est π ou un multiple impair de π et le segment est dit négatif.

§ 356 — *Multiplication.* — Un segment a est dit égal à $b \times c$, si le module de a est égal au produit des modules de b et c, et l'argument de a à la somme des arguments de b et de c. Il est clair d'après cela que l'on a $b \times c \doteq c \times b$, et que $a \times b \times c \doteq a \times (b \times c)$.

En effet, si B C A sont les modules de b c a et β γ α leurs arguments les égalités précédentes résultent de ce que :

$$B \times C = C \times B \qquad A \times B \times C = A \times (B \times C)$$

$$\beta + \gamma = \gamma + \beta \qquad \alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Une autre propriété très importante de la multiplication est celle qui s'exprime par l'égalité.

$$(b + c) \times a \doteq b \times a + c \times a$$

Pour la démontrer soit $OB \doteq b$ $BC \doteq c$ alors $OC \doteq b + c$.

Soit ρ le module, μ l'argument de a : faisons tourner le triangle OBC tout d'une pièce d'un angle μ, et agrandissons ensuite ses côtés dans le rapport de ρ à l'unité ; nous aurons un triangle O B″ C″ dont les côtés sont les côtés du triangle OBC tous multipliés par a.

On aura $\qquad OB'' \doteq b \times a, B''C'' \doteq c \times a \;\; OC'' \doteq (b + c) \times a$

mais d'autre part par la définition de l'addition on a

$$OC'' \doteq OB'' + B''C''$$

donc $\qquad (b + c) \times a = b \times a + c \times a$

Ce qui démontre la proposition.

Remarquons encore qu'un segment n'est pas altéré quand on le multiplie par un segment égal à $+ 1$, c'est-à-dire de module 1 et d'argu-

ment nul. Il est changé de sens quand on le multiplie par — 1. (Segment de module 1 et d'argument π)

Le produit de deux segments réels et positifs est réel positif, et égal au produit arithmétique de ces deux segments. La multiplication d'un segment réel par un segment négatif change son signe. Tout ceci se vérifie facilement.

La règle de multiplication des polynomes s'applique à la multiplication des segments puisqu'elle est fondée sur les propriétés de la multiplication démontrées ci-dessus.

Représentation nouvelle des Segments

§ **357**. — Soit O M un segment, P la projection de M sur OX, soit $OP = x$ $PM = y$, x et y sont les coordonnées de M. Désignons par i un segment de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, on écrira d'après nos notations.

$$OM \simeq OP + PM$$

O H étant sur l'axe ox sera simplement représenté par x, P M c'est $y \times i$, puisque c'est le segment réel y qu'on a fait tourner de l'angle $\frac{\pi}{2}$. On écrit donc avec nos notations.

$$OM \simeq x + iy$$

D'après la propriété de la multiplication, si O M' est un autre segment tel que

$$OM' \simeq x' + iy'$$

on aura :

$$OM \times OM' \simeq xx' + iyx' + ixy' + i^2yy'$$

les segments iyx' ixy' sont tous deux portés sur une parallèle à OY leur somme est donc égale à i $(yx' + xy')$ le signe + dans la parenthèse ayant le sens de l'addition algébrique, de même comme la mul-

tiplication par i^2 équivaut à ajouter deux fois $\frac{\pi}{2}$ à l'argument, $i^2 yy'$ représente un segment porté sur ox en sens inverse de $y\ y'$ de sorte que $xx' + i_2\ yy'$ équivaut à $xx'\ yy'$ le signe — ayant le sens arithmétique. On peut donc écrire

$$OM \times OM' \triangleq xx' - yy' + i\,(yx' + xy')$$

les signes ont le sens arithmétique sauf celui qui est placé devant le symbole i.

On aboutit ainsi au calcul des imaginaires tel qu'il a été établi autrement, à la huitième leçon.

§ **358**. — Mais on va déduire de cette manière d'envisager les choses des formules de trigonométrie.

Si O M a pour argument a et pour module R, on voit que $x = R\ cos\ a\ \ y = R\ sin\ a$. Ces formules sont vraies en grandeur et signe ; car si R était égal à l'unité, x et y seraient par définition même le sinus et le cosinus de l'angle a.

De même, pour un autre segment O M' d'argument a' et de module R' on aura. $x' = R'\ cos\ a'\ \ y' = R'\ sin\ a'$.

Or, d'après la définition même de la multiplication :

$$OM \times OM' \triangleq RR'\ cos\,(a + a') + i\ RR'\ sin\,(a + a')$$

dans la formule

$$OM \times OM' \triangleq xx' - yy' + i\,(yx' + xy').$$

Remplaçons x et y par leurs valeurs ainsi que $x'\ y'$, on a ;

$$OM \times OM' \triangleq RR'\ (cos\ a\ cos\ a' - sin\ a\ sin\ a') + i\ RR'\ (sin\ a\ cos\ a' + cos\ a\ sin\ a').$$

de là résulte que:

(1) $$cos\,(a + a') = cos\ a\ cos\ a' - sin\ a\ sin\ a'$$

(2) $$sin\,(a + a') = sin\ a\ cos a' + cos\ a\ sin\ a'$$

Ce sont les formules d'addition des arcs que l'on retrouve ainsi d'une façon un peu indirecte.

Si l'on a plusieurs quantités, de module 1, $\cos a + i \sin a, \cos a + i \sin a', \cos a'' + i \sin a''$ etc., leur produit est égal à $\cos(a + a' + a'' + \ldots) + i \sin(a + a' + a'')$. d'où il résulte ensuite en les faisant toutes égales entre elles, que

$$(^3) \qquad \cos ma + i \sin m a = (\cos a + i \sin a)^m$$

Je vais démontrer qce cette formule subsiste quand m est fractionnaire; à cet effet, je remplace dans la formule m par p, et a par $\frac{a}{p}$ et j'ai

$$\cos a + i \sin a = \left[\cos \frac{a}{p} + i \sin \frac{a}{p}\right]^p$$

de sorte que :

$$\cos \frac{a}{p} + i \sin \frac{a}{p} = \sqrt[p]{\cos a + i \sin a} = (\cos a + i \sin a)^{\frac{1}{p}}$$

Il faut toutefois faire attention que quand un segment est donné, son argument n'est déterminé qu'à un multiple de 2π près.

Or si on remplace a par $a + 2\,K\pi$, K étant entier, $\cos a$ et $\sin a$ ne changent pas, mais $\cos \frac{a}{p}$ et $\sin \frac{a}{p}$ changent; l'égalité précédente exprime donc simplement que le premier membre est l'une des valeurs que peut prendre le second. La formule correcte sera:

$$\cos \frac{2\,K\pi + a}{p} + i \sin \frac{2\,K\pi + a}{p} = (\cos a + i \sin a)^{\frac{1}{p}}$$

et en multipliant les arguments par m, et ayant égard à (3)

$$(^4) \quad \cos\left[\frac{2\,K\pi + a}{p}\right] m + i \sin \frac{(2\,K\pi + a)\,m}{p} = (\cos a + i \sin a)^{\frac{m}{p}}$$

ce qui est la formule (3) où m est remplacé par $\frac{m}{p}$

§ **359**. — Je ne veux pas ici faire la théorie complète des exponentielles imaginaires, ce qui m'entraînerait trop en dehors de la géométrie pure ; je veux néanmoins établir une notion qui nous sera utile

sinon indispensable pour la géométrie non enclidienne dont je dirai quelques mots au chapitre suivant.

On sait que le logarithme de z dans la base a, est le nombre u tel que $a^u = z$; les propriétés des logarithmes peuvent se déduire tous de cette propriété unique que $\log z + \log z' = \log zz'$. Et si nous posons $\log z = u \log z' = v$, on aura $a^u = z\ a^v = z'$, et la propriété ci-dessus résultera de ce que $a^u \times a^v = a^{u+v}$.

On voit aussi que la base la plus commode en analyse est le nombre e qui est la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ pour m infini, et sur les propriétés duquel nous n'avons pas à insister ici.

Soit maintenant une imaginaire $\alpha + i\beta$; nous poserons par définition

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

Je vais montrer que la propriété $e^u \times e^v = e^{u+v}$ s'applique encore ici : en effet elle équivaut à

$$e^{\alpha} (\cos\beta + i \sin\beta) \times e^{\alpha'} (\cos\beta' + i \sin\beta') = e^{\alpha + \alpha'} [\cos (\beta + \beta') + i \sin (\beta + \beta')]$$

et se déduit immédiatement de la définition de la multiplication.

Cela posé, nous définirons le logarithme d'une imaginaire $A + Bi$ comme une autre imaginaire u, celle $e^u = A + Bi$.

Cherchons d'après cela le logarithme de $r(\cos\theta + i \sin\theta)$ on devra avoir :

$$e^{x + iy} = r (\cos\theta + i \sin\theta)$$

c'est-à-dire :

$$e^x (\cos y + i \sin y) = r (\cos\theta + i \sin\theta)$$

Les modules des deux membres doivent être égaux, leurs arguments doivent être égaux à un multiple de 2π près, on doit donc avoir

$$e^x = r \text{ d'où } x = \log r$$

$$y = \theta + 2 K\pi$$

Le logarithme cherché est donc : $\log r + i (\theta + 2 K\pi)$

§ **360**. — On voit qu'il y a une infinité de logarithmes, qui diffèrent entre eux que d'un multiple de $2\,i\pi$. Si $\theta = 0$ auquel cas le nombre donné est réel et positif, l'un d'eux est réel ; Si $\theta = \pi$, (nombre négatif), la partie imaginaire est un multiple impair de $i\pi$; si $r = 1$, c'est-à-dire si la quantité donnée a pour module 1, les logarithmes sont purement imaginaires. Le cas que nous aurons à considérer dans la suite est celui où l'on a un rapport anharmonique.

$$\frac{m-u}{m-u'} : \frac{m'-u}{m'-u'}$$

u et u' étant des quantités imaginaires conjuguées, m et m' des quantités réelles : alors $m-u$ et $m-u'$ sont conjugués, ils ont même module, le module de $\frac{m-u}{m-u'}$ est égal à 1, de même celui de $\frac{m'-u'}{m'-u}$. Les logarithmes du rapport anharmonique considéré sont donc des imaginaires pures, et leur quotient par $2\,i$ est une expression réelle.

D'après ce que nous avons dit, la formule

$$Log.\, z + Log.\, z' = Log.\, zz'$$

est encore vraie ici, seulement comme les logarithmes ont plusieurs valeurs, il est plus correct d'écrire

$$Log.\, z + Log.\, z' = 2\,K\,\pi\, i + Log.\, zz'$$

Dans le cas contraire, il faudrait entendre que l'une des valeurs du premier membre est égale à l'une des valeurs du second.

VINGT-SIXIÈME LEÇON

SYSTÈMES DE COORDONNÉES TÉTRAÉDRIQUES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

§ **361**. — *Définition des coordonnées tétraédriques*. — Soient quatre polynomes homogènes à quatre variables $x\ y\ z\ t$. Nous désignerons ces quatre polynomes par XYZT. En les égalant à zéro, on obtient en coordonnées homogènes les équations de quatre plans. Je suppose que ces quatre plans ne se coupent pas en un même point ; ils forment alors un tétraèdre nommé *tétraèdre de référence*.

La condition que ces quatre plans ne passent pas par un même point se traduit analytiquement par celle-ci : Il n'y a pas entre les quatre polynomes de relation de la forme $\lambda X + \mu Y + \nu Z + \theta T = 0$, $\lambda\ \mu\ \nu\ \theta$ étant des constantes non toutes nulles. En effet, θ n'étant pas nul, dans une pareille relation, tous les points pour lesquels T serait nul, seraient ceux pour lesquels on aurait $\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$, or le plan représenté par une telle équation passe évidemment par le point commun aux trois $X = o$ $Y = o Z = 0$. Ainsi une telle idendité exprimerait que l'un des plans passe par le point où se coupent les trois autres.

§ **362**. — Si $x\ y\ z\ t$ sont les coordonnées homogènes d'un point P non situé dans le plan $X = o$, le polynome X ne devient pas nul quand on y substitue les coordonnées de ce point. Le polynôme X où l'on a substitué le coordonnées de P est proportionnel à la distance de P au plan (§ 111). De plus il change de signe quand P traverse ce plan. La valeur de X quand P est donné, n'est du reste déterminée qu'à un facteur constant près, car les coordonnées homogènes de P ne sont déterminées

qu'à un facteur constant près. On appellera *coordonnées tétraédriques* du point P des quantités proportionnelles aux résultats obtenus en substituant dans X Y Z T les coordonnées homogènes du point P.

Les coordonnées tétraédriques sont ainsi des fonctions linéaires (Polynômes du premier degré) des coordonnées homogènes.

Réciproquement, les coordonnées homogènes sont fonctions linéaires des coordonnées tétraédriques.

Considérons en effet une fonction linéaire (homogène) de X Y Z T $u\text{X} + v\text{Y} + w\text{Z} + h\text{T}$. Choisissons $u\ v\ w\ h$ de façon que dans ce polynôme les coefficients de $y\ z\ t$ soient nuls, $u\ v\ w\ h$ seront déterminés à un facteur près par quatre équations à quatre inconnues sans second membre. Le coefficient de x dans ce polynôme, ne sera pas nul, car alors le polynôme serait indentiquement nul, ce qui ne peut être (§ 361). On aura donc x en fonction linéaire de XYZT, puisque le polynôme obtenu se réduit à x multiplié par une constante non nulle.

On verra de même que $y\ z\ t$, sont fonctions linéaires des coordonnées tétraédriques.

Dès lors, si l'on a une équation homogène de degré m en $x\ y\ z\ t$, en y remplaçant $x\ y\ z\ t$ par leurs valeurs en X Y Z T, on obtiendra une équation homogène de degré m par rapport à ces variables. Ce sera l'équation d'une surface d'ordre m en coordonnées tétraédriques.

Remarque. — t est, d'après ce qui précède, une fonction linéaire des coordonnées tétraédriques. En égalant à zéro cette fonction, on a l'équation du plan de l'infini.

§ **363**. — *Coordonnées d'un point d'une droite.* — Les formules (6) du § 108 donnent les coordonnées d'un point qui divise AB dans un rapport donné m. Dans ces formules, remplaçons $x_0\ y_0\ z_0,\ x_1\ y_1\ z_1$ par $\frac{x_0}{t_0} \cdots \frac{x_1}{t_1}$ et les valeurs analogues, mettons à la place de m la valeur $\lambda \times \frac{t_0}{t_1}$ on voit que les coordonnées homogènes du point seront $x_0 + \lambda x_1$, $y_0 + \lambda y_1$, $z_0 + \lambda z_1$, $t_0 + \lambda t_1$, le rapport anharmonique des quatre points A B M N sera égal au rapport des valeurs de λ correspondant aux points M et N.

Si nous remplaçons dans X, x par $x_0 + \lambda x_1$, y par $y_0 + \lambda y_1$, etc., X devient $X_0 + \lambda X_1$. X_0 étant ce que devient X quand on y substitue les coordonnées de A ; X_1, ce qu'il devient quand on y substitue celles de B. Ainsi les quatre coordonnées tétraédriques de M seront $X_0 + \lambda X_1$, $Y_0 + \lambda Y_1$, $Z_0 + \lambda Z_1$, $T_0 + \lambda T_1$.

§ **364.** — *Intersection d'une droite et d'une surface.* — Dans l'équation d'une surface en coordonnées tétraédriques remplaçons X Y Z T par $X_0 + \lambda X_1$, etc. Nous aurons comme au § 290 une équation en λ, donnant les valeurs de λ qui correspondent aux points où AB rencontre la surface.

Supposons que la surface soit du second ordre, cette équation en λ sera du second degré, elle a deux racines λ et μ auxquelles correspondent deux points M et N. Comme le rapport anharmonique (ABMN) est $\lambda : \mu$, pour que A et B soient conjugués par rapport à M et N il faut que $\frac{\lambda}{\mu} = -1$ ou $\lambda + \mu = o$. Le coefficient de λ dans l'équation du second degré doit donc être nul.

Une équation du deuxième degré homogène à 4 variables contient deux espèces de termes ; des carrés tels que AX^2, des produits tels que 2BXY (nous mettons 2B comme coefficient pour avoir le facteur 2 partout dans le coefficient de λ).

Quand on remplace X par $X_0 + \lambda X_1$, le coefficient de λ dans AX^2 esf $2 AX_0 X_1$, le coefficient de λ dans 2BXY est de même $2 B X_0 Y_1 + 2 B Y_0 X_1$.

On pourra faire la somme des coefficients de λ ainsi calculés, et après avoir supprimé le facteur 2, égaler cette somme à zéro. On obtiendra ainsi la condition pour que A et B soient conjugués par rapport à la surface.

Cette condition est du premier degré par rapport aux coordonnées tétraédriques de A et B ; ceci montre que quand A est fixe, le lieu de B est un plan (plan polaire de A).

On peut chercher le plan polaire de l'un des quatre sommets du tétraèdre de référence. L'un des sommets est le point où se coupent

les trois plans $Y = o$ $Z = o$ $T = o$. Le plan polaire de ce sommet a donc pour équation celle qu'on obtient en remplaçant dans l'équation du plan polaire de A, Y_0 Z_0 et T_0 par zéro.

En formant de cette façon les équations des plans polaires des quatre sommets, et cherchant la condition pour que chaque sommet ait pour plan polaire la face opposée, on trouvera le résultat suivant que je me borne à énoncer.

Pour que le tétraèdre de référence soit conjugué par rapport à une surface du second ordre, il faut et il suffit que l'équation de cette surface ne contienne que des carrés.

§ **365**. — Soit $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 + \delta T^2 = 0$

l'équation d'une surface du second ordre conjuguée par rapport au tétraèdre de référence. On ne changera pas ce tétraèdre en remplaçant X par pX, Y par qY, Z par rZ T par sT. On remplace ainsi des coordonnées tétraédriques, par d'autres qui se rapportent au même tétraèdre de référence ; alors α est changé en $p^2 \alpha$, β en $q^2 \beta$, γ en $r^2 \gamma$, δ en $s^2 \delta$ si nous choisissons $p\, q\, r\, s$, de façon que $p^2 \alpha$, $q^2 \beta$, $r^2 \gamma$, $s^2 \delta$ soient égales à 1 en valeurs absolues, l'équation de la surface prendra la forme

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + \rho T^2 = 0$$

les coefficients $\lambda\ \mu\ \nu\ \rho$ étant égaux à 1 en valeur absolue.

Transformations linéaires.

§ **366**. — Soient P Q R S quatre polynômes du premier degré homogènes de X Y Z T. Si X Y Z T sont les coordonnées d'un point A, P Q R S celles d'un point B, on voit qu'à chaque point A correspond un point B. On pourra (comme au § 362) trouver X Y Z T en fonction du premier degré de P Q R S (sauf le cas où les plans $P = 0$, $Q = 0$ $R = 0$ $S = 0$ seraient concourants). Dès lors à chaque point

B correspondra un point A. A un plan correspondra un plan, car la transformation qui consiste à remplacer P Q R S par des fonctions du premier degré d'X Y Z T n'altère pas le degré.

A une droite intersection de deux plans correspondra la droite intersection des deux plans correspondants.

Du reste, si l'on considère les deux tétraèdres dont les faces ont pour équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, et $X = 0$ $Y = 0$ $Z = 0$ $T = 0$, le point A dont les coordonnées par rapport à ce dernier tétraèdre sont X Y Z T, a pour coordonnées par rapport au premier, P Q R S, et ces quatre dernières quantités sont aussi les coordonnées de B par rapport au second tétraèdre. Ainsi *deux points correspondants sont deux points ayant même coordonnées tétraédriques par rapport à deux tétraèdres différents.*

§ **367**. — Soient quatre points en ligne droite A B M N, en adoptant les notations du § 363, les coordonnées de M et N seront $X_0 + \lambda X_1$ etc. $X_0 + \mu X_1$ etc., celles des points correspondants seront $P_0 + \lambda P_1$, etc. $P_0 + \mu P_1$ etc. Le rapport anharmonique (A B M N) sera $\frac{\lambda}{\mu}$, ce sera aussi le rapport anharmonique des quatre points correspondants.

Le rapport anharmonique de quatre points sera donc égal à celui de leurs quatre correspondants.

Comme le rapport anharmonique de quatre plans se ramène en coupant par une droite à celui de quatre points, la proposition est aussi vraie pour quatre plans et leurs correspondants.

§ **368**. — Parmi les transformations du premier degré que nous venons de définir, nous allons considérer *celles qui changent en elle-même une certaine surface du deuxième ordre.*

Considérons deux tétraèdres conjugués par rapport à une surface S du deuxième ordre. Par rapport au premier tétraèdre, l'équation de la surface a, comme on l'a vu, la forme

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + \rho T^2 = 0$$

Soient P Q R S les coordonnées d'un point par rapport à l'autre tétraèdre, ce sont des fonctions linéaires et homogènes de X Y Z T.

Soit $$\alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2 + \delta S^2 = 0$$

l'équation de la surface par rapport au deuxième tétraèdre. D'après ce que nous avons vu (§ 365) on peut supposer que les coefficients des carrés dans ces équations sont égaux à 1 au signe près. De plus, les signes des carrés doivent être les mêmes dans les deux équations, car si la surface est homologique d'une sphère, il y aura trois carrés de même signe, ou quatre si cette sphère est imaginaire; si la surface est réglée, il y aura deux carrés positifs et deux négatifs (§ 133).

Mais alors la transformation définie par les formules $X = P$, $Y = Q$, $Z = R$, $T = S$ transforme évidemment la surface proposée en elle-même.

§ **369**. — Pour former un tétraèdre conjugué, on peut prendre arbitrairement un sommet A, une arête passant par A, coupée en B par le plan polaire de A, une face passant par AB, coupée en C par la droite conjuguée de AB et le quatrième sommet D est le pôle du plan ABC. A chaque tétraèdre ABCD ainsi formé, correspondent plusieurs transformations n'altérant pas les surfaces, outre celles définies par $X = P$, $Y = Q$, $Z = R$, $T = S$, il y a $X = P$, $Y = -Q$, $Z = -R$, $T = -S$ et $X = P$, $Y = Q$, $Z = -R$, $T = -S$, etc.

Ces sortes de transformations présentent le même degré d'arbitraire que celles qui consistent à déplacer un corps ou le remplacer par son symétrique.

En effet, si nous considérons un trièdre trirectangle lié au corps, on peut placer l'origine O où l'on veut, l'axe des x du trièdre suivant une droite arbitraire passant par O, le plan des $x\,y$ suivant un plan quelconque passant pas OX; c'est le même degré d'arbitraire que pour tracer le tétraèdre ci-dessus ; mais en outre, on peut changer la direction OX, la direction OY, la direction OZ, de même que dans les transformations ci-dessus on peut choisir les signes devant P Q R et S.

La transformation qui consiste à changer X en — X sans changer Y Z T, est l'analogue de celle consistant à prendre la symétrique d'une

figure par rapport au plan $y\,o\,z$; celle qui consiste à changer les signes de X et de Y est analogue à celle qui consiste à prendre la symétrique d'une figure par rapport à OZ.

§ **370**. — On peut toujours, étant donnés deux tétraèdres conjugués T et T_1, considérer un tétraèdre conjugué variant d'une façon continue de T à T_1, il suffit pour cela de choisir des sommets A_1 A_2 A_n allant de A (sommet de T) à A′ sommet de T′ en formant une suite continue, puis les arêtes $A_1 B_1$ $A_2 B_2$ de la même façon, puis les faces $A_1 B_1 C_1$... de la même façon.

On voit alors que l'on pourra remplacer une des transformations qui change T en T′ par une série de transformations aussi voisines qu'on voudra les une des autres. Soit $X = P$, $Y = Q$, $Z = R$, $T = S$ une telle tranformation ; elle est analogue à un déplacement d'un trièdre trirectangle ; la transformation $X = -P$, $Y = Q$, $Z = R$, $T = S$ sera analogue à un déplacement suivi d'une symétrie.

§ **371**. — La tranformation $X' = -X$, $Y' = -Y$, $X' = Z$, $T' = T'$ analogue à une symétrie par rapport à $o\,z$, c'est-à-dire a une rotation de 180° équivaut à une suite continue de transformations. En effet, si l'on pose.

$$X' = X \cos. t - Y \sin. t$$

$$Y' = X \sin. t + Y \cos. t$$

$$Z' = Z,\ T' = T$$

on voit que pour $t = 0$ on a la figure sans changement ; pour $t = \pi$. on a $X' = -X$, $Y' = -Y$ de plus, on vérifie sans peine que $X^2 + Y^2 \pm Z^2 \pm T^2$ se change en $X'^2 + Y'^2 \pm Z'^2 \pm T'^2$ et que par suite la surface dont l'équation s'obtient en égalant à zéro cette somme de carrés, se change en elle-même.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON

APERÇU SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

§ **327**. — En géométrie élémentaire, on nomme *Postulatum d'Euclide*, cet axiome d'après lequel on ne peut mener par un point qu'une seule parallèle à une droite. On a souvent cherché à démontrer cette proposition, puis on s'est aperçu qu'elle ne pouvait pas l'être, n'étant pas une conséquence des autres axiomes de Géométrie. Ce qui suit démontre ce fait, et fait connaître en même temps une interprétation concrète de la géométrie sans le postulatum d'Euclide, ou géométrie *non euclidienne*. Cette théorie dont nous ne donnons qu'un simple aperçu, est due à *Klein*, géomètre allemand et à *Cayley*, géomètre anglais.

§ **373**. — Nous allons montrer qu'en attribuant aux mots *déplacement*, *angle*, *distance*, un sens différent du sens habituel, les axiomes de la géométrie autres que le postulat d'Euclide subsistent, mais que celui-ci cesse d'être vrai.

Considérons une surface S homologique d'une sphère, et que nous nommerons *l'absolu*. *L'espace* sera l'ensemble des points *intérieurs à l'absolu*. Soient A et B deux points, P et Q les points où AB coupe l'absolu. Nous désignerons par la notation AB le logarithme du rapport anharmonique (ABPQ).

On a alors $AB = - BA$, car en changeant A en B, le rapport anharmonique est remplacé par son inverse, et son logarithme change de signe. On aura de même pour des points en ligne droite $AB + BC + CA = 0$, car le produit de (ABPQ), (BCPQ), (CAPQ) est égal à l'unité, son logarithme est donc nul. Ainsi les relations entre les points en ligne droite subsistent ici.

§ **374**. — Une transformation n'altérant pas l'absolu changera P et Q en deux autres points de l'absolu, A et B en deux points A' B'. Elle change donc AB en A'B'.

C'est pourquoi nous appellerons *déplacement* une pareille transformation, si elle équivaut à une suite continue de transformations, ce sera une *symétrie* dans le cas contraire.

L'axiome fondamental de la géométrie « *Etant données deux demi-droites* AX, BY, *et un demi-plan* P *passant par* AX, *un demi-plan* Q *passant par* BY, *on peut toujours amener* BY *sur* AX, *et le demi-plan* Q *sur le demi-plan* P », subsiste avec le nouveau sens que nous donnons au mot déplacement.

§ **375**. — Pour que AB soit infini, il faut que A ou B coïncide avec P ou Q, c'est-à-dire que A ou B soit sur l'absolu. *L'absolu est donc l'ensemble des points à l'infini.*

§ **376**. — Soient M et N deux plans passant par une droite D (qui rencontre l'absolu). Par D menons deux plans (imaginaires conjugués) tangents à l'absolu, soient P Q ces plans. Le logarithme du rapport anharmonique (MNPQ) sera (§ 369) une imaginaire pure déterminée à un multiple de $2 i\pi$ près. Ce logarithme divisé par $2i$ sera une quantité réelle déterminée à un multiple de π près. Ce sera l'angle des deux plans M et N ; comme on a $\cos. \pi, + i \sin. \pi = - 1$, $i\pi$ est l'un des logarithmes de $- 1$; donc si les plans M N P Q forment un faisceau harmonique, angle MN $= \frac{\pi}{2}$; on dit que les deux plans MN sont *rectangulaires*.

§ **377**. — On définira *l'angle de deux droites qui se coupent*, comme il suit : le plan de ces deux droites coupe l'absolu suivant une conique à laquelle par le point de rencontre des droites, on pourra mener deux tangentes ; en divisant par $2i$ le logarithme du rapport anharmonique de ces quatre droites, on aura *l'angle* des deux droites données.

Le *déplacement* n'altère pas *l'angle* de deux plans ou de deux droites. On le démontre comme pour les segments (§ **373**).

On a, comme au § **373** $AOB + BOC + COA = K\pi$, si les trois droites OA OB OC sont dans un même plan.

Soit une droite qui coupe l'absolu en P et Q ; par un point A on peut mener deux droites AP, AQ *parallèles* à la droite, c'est-à-dire la rencontrant à l'infini. *Le Postulatum d'Euclide n'est donc pas vrai avec nos nouvelles définitions.*

§ **378**. — La Géométrie *Riemanienne* est une autre espèce de Géométrie où l'absolu est la figure homologique d'une sphère imaginaire ; les points P et Q où AB coupe l'absolu étant imaginaires, on appellera distance AB le logarithme de ABPQ divisé par $2i$.

La *distance* de deux points est alors définie à un multiple de π près ; elle est égale à *l'angle* des plans polaires de ces points par rapport à l'absolu.

On obtiendrait encore une géométrie d'une autre espèce si l'absolu était une *surface réglée.*

Dans la géométrie euclidienne, l'absolu se réduit à une courbe, le cercle de l'infini.

NOTE SUR L'INVERSION

En multipliant par K les coordonnées $x\ y\ z$ d'un point M, et divisant par $x^2 + y^2 + z^2$ (ou OM^2), on a celles d'un second point M'. M et M' sont en ligne droite avec O (l'origine), car leurs coordonnées sont proportionnelles. On vérifie que $OM \times OM' = K$. M' est donc l'inverse de M, O étant le pôle. M, M' *et* O *lui-même peuvent être imaginaires, (car dans les formules 3 du* § **104** a b c *peuvent être imaginaires). Ceci fournit le moyen de trouver l'équation de la surface inverse d'une surface donnée par son équation.*

On démontrera alors sans peine le théorème du § **142** *sans supposer les points réels,* ce qui est utile pour la suite (§ **157**).

Dans la géométrie plane, on laissera de côté la variable Z.

FIN

ERRATA

Pages 13, *lignes* 23 et 24, *mettez* le signe = après $f(x)$ et *au lieu de* $f(\delta) - f(\delta)$ *lisez* $f(\beta) - f(\delta)$.

Page 28, *ligne* 29, *au lieu de* D le plan SOP *lisez* le plan SOP.

Page 32, *ligne* 10, *au lieu de* le plan polaire, *lisez* les plans polaires.

Page 45, *ligne* 10, *au lieu de* M M′, *lisez* M et M'_1.

Page 48, *ligne* 1, *au lieu de* S′ M′, *lisez* S′ M'_1.

Page 66, *ligne* 23, *au lieu de* (δ, *lisez* Cδ.

Page 73, *ligne* 5, *au lieu de* (xyz), *lisez* $(x_0 y_0 z_0)$.

Page 75, *ligne* 18, supprimez le λ à la fin de la parenthèse.

Page 89 *ligne* 16 et 17, *au lieu de* dominateurs, *lisez* dénominateurs.

Page 97, *ligne* 10, *au lieu de* une sphère est un plan, *lisez* un plan est une sphère.

Page 162, *ligne* 2, *au lieu de* $\alpha\beta$, *lisez* $\alpha\gamma$.

L'indice 1 est en trop aux endroits suivants :

Page 31, à la lettre M.

Page 17, *ligne* 5, aux lettres A et D.

Page 29, *ligne* 7, et à la deuxième lettre A.

Page 131, *lignes* 2 et 7, à la première lettre S.

TABLE DES MATIÈRES



